

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES



TESIS DOCTORAL

**Costes y precios del riesgo : aproximación a través de la
teoría de sistemas**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Ángel Vegas Montaner

DIRECTOR:

Ubaldo Nieto de Alba

Madrid, 2015

Angel Vegas Montaner

TP
1981
185



x - 48 - 006323 - 7

COSTES Y PRECIOS DEL RIESGO: APROXIMACION A TRAVES
DE LA TEORIA DE SISTEMAS.

Departamento de Actual y Financiero
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
1981



BIBLIOTECA

© Angel Vegas Montaner
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1981
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-36709-1981

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

"COSTES Y PRECIOS DEL RIESGO: APROXIMACION A
A TRAVES DE LA TEORIA DE SISTEMAS"

Director de Tesis: UBALDO NIETO DE ALBA

Autor: ANGEL VEGAS MONTANER

Marzo 1981

MADRID

INDICE

INDICE

I.- INTRODUCCION

I.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	1
I.2.- LA CONCEPCION CLASICA Y SUS LIMITACIONES.....	3
I.2.1.- Teorías del Riesgo.....	12
I.3.- LA CONCEPCION SISTEMA.....	26
I.3.1.- Metodología de los Sistemas.....	38
I.3.2.- Sistemas de Control. Servosistemas.....	44
I.3.3.- Estructura del Sistema Actuarial.....	46

I.- EL COSTE ESTADISTICO

II.1.- EL PROCESO GENERAL DE RIESGO.....	62
II.2.- DISTRIBUCIONES BASICAS DEL PROCESO DE RIESGO...	71
II.2.1.- DISTRIBUCION DEL NUMERO DE SINIESTROS.....	78
II.2.1.1.- Distribución Binomial.....	79
II.2.1.2.- Distribución de Poisson Simple.....	80
II.2.1.3.- Distribución de Polya-Eggenberges.....	88
II.2.1.4.- Distribución Binomial Negativa.....	92
II.2.1.5.- Distribución de Polya Generalizada.....	116
II.2.1.6.- Distribución de Poisson Compuesta.....	120
II.2.1.7.- El Número de siniestros como un proceso es-	
tócástico.....	128
II.2.1.7.1.- El Proceso de Poisson Homogéneo.....	128
II.2.1.7.2.- El Proceso de Poisson Homogéneo en el	
Tiempo.....	138
II.2.1.7.3.- Procesos de Contagio.....	139
II.2.1.7.3.1.- Proceso de Polya-Eggenberger.....	141
II.2.1.7.3.2.- Proceso de Hoffman.....	143
II.2.1.7.3.3.- Proceso de Greenwood-Yule.....	144
II.2.1.7.5.- Planteamiento General de los Procesos	
Estocásticos.....	144
II.2.1.7.5.- Procesos de Markov para Siniestros sucesi-	
vos dependientes.....	148

II.2.2.-	DISTRIBUCION DE LA CUANTIA DE LOS SINIES- TROS.....	152
II.2.2.1.-	Distribución Causal.....	154
II.2.2.2.-	Distribución Gamma.....	154
II.2.2.3.-	Distribución Logarítmico-Normal.....	178
II.2.2.4.-	Distribución de Pareto.....	186
II.2.2.5.-	Distribución de los Polinomios Exponencia- les.....	210
II.2.2.6.-	Distribución de Esscher.....	212
II.2.2.7.-	Distribución de la Intensidad del Daño.....	212
II.2.2.8.-	Distribución de Weibull.....	214
II.3.-	DISTRIBUCION DE LA CUANTIA DEL DAÑO PARA n SINIESTROS.....	217
II.4.-	DISTRIBUCION DEL DAÑO TOTAL.....	220
II.4.1.-	Elementos Fundamentales de la Distribución del Daño Total.....	225
II.4.2.-	Función de Poisson Generalizada para casos concretos de $V(x)$	228
II.4.3.-	Aproximaciones a la Distribución del Daño Total.....	229
II.4.3.1.-	Aproximación Normal.....	233
II.4.3.2.-	Método NP (Normal Power).....	235
II.4.3.3.-	Método G o de la Distribución Gamma.....	241
II.4.3.4.-	Método de Esscher.....	247
II.4.3.5.-	Método de Montecarlo.....	255
II.4.3.6.-	Método de Inversión de la Función Caracte- rística.....	259
II.4.3.7.-	Métodos Mixtos de Aproximación.....	260
II.4.3.8.-	Métodos Programables.....	262
II.4.4.-	Modelo de Almer.....	264

III.- LA FORMACION DEL PRECIO

III.1.-	EL PROBLEMA DE LA TARIFICACION ESTADISTICA.	269
III.1.1.-	Principios del Cálculo de Primas.....	270
III.1.2.-	Prima de Riesgo y Prima Colectiva.....	273
III.1.3.-	Cálculo de la Prima por el Principio del valor Esperado.....	277

III

III.1.4.- Participación del Asegurado en la Cobertura del Riesgo.....	281
III.1.5.- La Prima Comercial y sus distintas componentes.	286
III.1.6.- Sistemas de Tarificación.....	288
III.1.7.- Tarificación Propiamente Dicha o por Clases....	290
III.2.- ANALISIS FACTORIAL.....	304
III.2.1.- Análisis de dos factores.....	304
III.2.2.- Análisis de tres factores.....	315
III.3.- TARIFICACION A POSTERIORI.....	324
III.3.1.- Sistema Bonus-Malus.....	327
III.3.2.- La Bonificación por Ausencia de Siniestro.....	353
III.3.3.- La Prima Modelada sobre el Riesgo de Delaporte.	357
III.3.4.- Sistema de Tarificación "Merit Rating".....	363
III.3.5.- La Tarificación Retrospectiva.....	366
III.3.6.- Tarificación según Programa.....	370
III.3.7.- Tarificación Especial.....	372
III.3.8.- La Teoría de la Credibilidad y su Aplicación a la Tarificación de Riesgos.....	375
III.3.8.1- Prima de Credibilidad.....	396
III.4.- EL RECARGO DE SEGURIDAD.....	402
III.4.1- Fijación de la Cuantía del Recargo de Seguridad	403
III.5.- LOS RECARGOS COMERCIALES.....	412
III.6.- POLITICA DE PRECIOS.....	416
III.6.1.- Influencia de la Dimensión Técnica de la Empresa en la Formación del Precio.....	417
IV.- <u>CONCLUSIONES</u>	420
BIBLIOGRAFIA.....	430

I.-

INTRODUCCION

I.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El título de la presente Tesis Doctoral, "Costes y Precios del Riesgo: Aproximación a través de la Teoría de Sistemas" es suficientemente explícito y expresivo del objeto de análisis que en la misma se desarrolla. Se trata, en efecto, de analizar el proceso de formación del precio del Seguro, mediante el estudio previo de sus factores de coste. Sin embargo, el planteamiento que se propone ya viene matizado por tratarse de una "aproximación a través de la Teoría de Sistemas", matización que tiene carácter sustantivo, en el sentido de que será fundamental en los propósitos de este trabajo. Y es por' ello que consideramos del mayor interés, en el planteamiento del problema cuyo análisis es el objeto de las páginas que siguen, distinguir dos niveles o planos operativos: el que llamaríamos plano inferior o concreto, de la propia formación del precio del Seguro como problema Actuarial, y el plano superior o genérico de la concepción Sistema como concepción transdisciplinal o interdisciplinal. Es este segundo un plano eminentemente metodológico, que debe ser analizado con un mínimo de extensión y de profundidad, para que su aplicación al plano concreto resulte lo más clara posible y permita obtener le mayor número de conclusiones válidas al trabajo que se inicia. Así pues, consideramos oportuno enfocar esta introducción en un nivel superior, más general, que el propio problema que en la Tesis se analiza, en un nivel más general incluso que el propiamente Actuarial, en un nivel, en definitiva, puramente metodológico, como dialéctica entre dos concepciones que han polarizado, en la historia de la Ciencia, los planteamientos que se han desarrollado. Hablaremos, pues, en un plano científico general, de tal forma que cuando hagamos apelación en esta parte introductoria al campo Actuarial, será por vía de ejemplo y como apoyatura a los razonamientos que, en un plano superior, se vayan desarrollando.

Situados en esta perspectiva, se puede hablar de dos concepciones fundamentales: la concepción clásica y la concepción sistema o enfoque sistémico. La característica fundamental de la pri-

mera es la fragmentación de los problemas para proceder a un análisis individual o separado de los mismos. La característica fundamental de la segunda es, por contra, el proceso de integración que permita contemplar el problema como un todo. Es el proceso de integración de ambientes, del que hablaremos posteriormente. Como dice el Dr. Ubaldo Nieto de Alba, en su brillante trabajo "Concepción Cibernética en la Dirección Actuarial de la Empresa de Seguros" (1), "recientemente se han desarrollado estudios encaminados a cubrir disciplinas o áreas científicas distintas. En esta dirección se encuentra la Teoría General de los Sistemas, que como conocimiento interdisciplinal intenta establecer un marco dentro del cual se integran operativamente todos los elementos del problema en estudio. Una de las razones más importantes para una Teoría general de los Sistemas es el problema de la comunicación entre las distintas disciplinas. Aunque existe una coincidencia en el método científico, sin embargo, los resultados de investigación de una disciplina no son frecuentemente comunicados a otras. Esta falta de comunicación entre científicos (físico, biólogo, economista, etc.) es todavía menor que la falta de comunicación culturas (científicas, ciencias sociales y humanísticas). En este aspecto, aparece la Cibernética como método común para campos de investigación en apariencia distintos.

El saber humano alcanzado hasta el presente siglo no es obra de unos pocos sabios de conocimientos universales, sino de la creciente especialización de los investigadores. Desde hace algunos años, la Cibernética empieza a servir de puente entre las distintas especialidades, haciendo resaltar sus estructuras comunes, dando lugar a una mutua fecundación entre las ciencias. Es decir, aspira a una síntesis entre: la universalidad exigida por el ideal de la cultura general, la precisión que exige la especificación y la operatividad que caracteriza a la acción".

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Concepción Cibernética en la Dirección Actuarial de la Empresa de Seguros. Centro de Investigaciones y Estudios del Seguro Iberoamericano. Estudio I, N°8/10. Junio, 1970. Pág. 17.

Así pues, surgen dos concepciones científicas perfectamente diferenciadas entre sí, la concepción clásica y la concepción sistema, en la que la segunda aparece como superadora de las insuficiencias de la primera, y que pasamos a analizar, no con un criterio de exhaustividad, sino comparativo, en el sentido de que, dado que las pretensiones de la presente Tesis no son las de establecer un análisis de la metodología científica sino la de analizar un problema técnico con el sustento científico necesario, nos limitaremos a seleccionar con un criterio crítico, las características más destacadas, a nuestros efectos, de ambas concepciones. Con la descripción de dichas características diferenciadoras no agotaremos, por supuesto, el ancho caudal de las posibilidades de investigación metodológica sobre dichas concepciones, pero nos serán suficientes para desarrollar nuestro análisis. Así pues, queda claro que nuestra pretensión, al analizar la concepción clásica y la concepción sistema, no es establecer una investigación exhaustiva y profunda sobre las mismas, sino simplemente dotarnos de unos medios conceptuales que nos permitan centrarnos en el tema en el que, efectivamente, pretendemos profundizar tanto como nos sea posible, que es el de la formación del precio del Seguro. Analicemos, pues, ambas concepciones con las limitadas pretensiones que hemos intentado poner de manifiesto.

I.2.- LA CONCEPCION CLASICA Y SUS LIMITACIONES

Como notas más destacadas y características de la Concepción clásica citaremos las siguientes:

a/ En la concepción Clásica, incluso diríamos que en los orígenes de la Ciencia, los problemas se estudiaban por ambientes: ambiente físico, químico, biológico, económico, social, político, etc. De esta forma, los problemas se presentaban aislados, independientes, y se elaboraba una ciencia y la consiguiente técnica para cada uno de estos ambientes. Por ejemplo, dentro del tema objeto de estudio de nuestra Tesis, podríamos decir que los costes y precios del Seguro no aparecerían ligados, en la concepción clásica, a los demás problemas de la empresa aseguradora, cuales son

los problemas de estabilidad y objetivos de la misma, no aparecerían tampoco ligados a las funciones de preferencia del empresario (dado que, evidentemente, los distintos empresarios tienen distintas preferencias por el riesgo), y, lo que es más importante, no estaban relacionados ni condicionados por el entorno, entorno no solamente socioeconómico, sino también legal, dado que, por ejemplo, hay legislaciones, y en la española este caso prolifera, en que el Estado, de una u otra forma, condiciona los valores de las tarifas de seguros. Pues bien, como decimos, en la concepción clásica, el análisis de los costes y precios del seguro se establecía con independencia de estos condicionamientos de entorno, que, por otra parte, existen y son importantes, e incluso decisivos en muchos casos. Es, como se ve, una importante deficiencia de la concepción Clásica, la que ponemos de manifiesto en esta primera nota característica de la misma.

b/ Como segunda nota definitoria, podemos decir que en toda concepción clásica faltaba la componente de interrelación entre los distintos elementos de un problema, no aparecían las concepciones globales, el todo (por ejemplo, la empresa) era suma de sus partes, no se podía plantear un problema de óptimo global o total, sino que lo que se hacía era optimizar una parte de ese todo, por ejemplo, se optimizaba el almacén o las ventas, o bien el subsistema financiero, pero sin que se pusiera de manifiesto la interrelación existente entre todos estos elementos, sin que se tuviera una concepción global del problema.

c/ Como tercera nota característica de la Concepción Clásica, referímonos a los objetivos, que en la Concepción Clásica aparecían aislados y considerados como únicos. Por ejemplo, se consideraba como objetivo de la empresa el maximizar el beneficio, o, dado que el beneficio es una variable aleatoria, maximizar la esperanza matemática del beneficio. Posteriormente se puso de manifiesto que, dado que los distintos empresarios tienen distintas propensiones al riesgo, era necesario introducir la función de utilidad del beneficio, de tal forma que el objetivo a maximizar era la esperanza matemática de la utilidad del beneficio. Además del beneficio, las empresas persiguen otros objetivos, como los de

dotarlas de una dimensión, de desarrollarlas, dotarlas de estabilidad, etc. Pues bien, en la Concepción Clásica no aparecía esta multiplicidad y multidimensionalidad de objetivos, y, en consecuencia de ello, la necesidad de su jerarquización, en función de los medios disponibles. Multidimensionalidad y jerarquización de objetivos son dos características de la política gestora que no se contemplaban, porque no se podían contemplar, en la Concepción Clásica.

d/ Por último, como cuarta nota característica de la Concepción Clásica, digamos que, en ella, el entorno en el cual se plantean los problemas y se adoptan decisiones, era considerado como un entorno estable, un entorno de certidumbre, en el sentido de que venía dado como un dato. Evidentemente, el entorno es cambiante ahora, lo ha sido y lo será siempre, por lo que no es que anteriormente se careciera de incertidumbre, sino que no se consideraba la existencia de tal incertidumbre, entre otras cosas porque no se conocían los instrumentos técnicos que permitieran tratarla y medirla. Así pues, con independencia de su carácter intrínsecamente aleatorio, en la Concepción Clásica el entorno era considerado como un dato más del problema.

Estas eran las cuatro notas que básicamente caracterizaban a la Concepción Clásica, notas que ponen en evidencia la insuficiencia de la misma para enfrentarse a los complejos problemas de un mundo moderno fuertemente interrelacionado. Como dice Angel Vegas Pérez, en el Prólogo al trabajo de Nieto de Alba anteriormente reseñado (1), " en la matemática actuarial clásica, aparecían dos ámbitos bastante diferenciados:

- a/ La matemática de las operaciones, con el cálculo de primas de reservas, problemas de tarificación etc. y
- b/ La matemática de la estabilidad, en la que se plantea el problema del equilibrio financiero del ente asegurador.

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Obra citada. Pag. 9.

Estos ámbitos no están enteramente diferenciados, ya que la estabilidad de la empresa no es independiente del precio del servicio que ofrece. No es posible concebir el cálculo de primas sin la existencia del recargo de seguridad, que (junto con las Reservas de estabilización y el Reaseguro) constituye una de las tres magnitudes de estabilización... Al dar entrada a la tendencia científica actual, que se enfrenta con la complejidad encaráda como tema autónomo (concepción interdisciplinal), lo que antecede equivale a decir que la concepción clásica consideraba ambos ámbitos de la matemática del seguro como sistemas reductibles, es decir, con funcionamiento independiente. Pero cuando se consideran interrelacionados y se pone en primer plano el comportamiento del sistema total, a través de los flujos de información, surge la concepción cibernética".

Es en este sentido interdisciplinal en el que Ubaldo Nieto de Alba (1) establece la definición de Teoría Matemática del Seguro como "ciencia que tiene por objeto el estudio cuantitativo de las operaciones de Seguro, en cuanto que tales operaciones se llevan a cabo por un ente que desarrolla su actividad dentro de un marco económico-social". En efecto, podemos decir que la Matemática Actuarial tiene por objeto el estudio de las operaciones de Seguro, operaciones financieras aleatorias, pero no en abstracto, sino teniendo en cuenta que tales operaciones las realiza un ente económico, una empresa (independientemente de que, por condicionamientos legales, que son condicionamientos del entorno, tal entidad deba adoptar la forma social de sociedad anónima o de mutualidad), empresa en la que hay un empresario que tiene unos objetivos y una propensión al riesgo, y que desarrolla su actividad dentro de un entorno que le condiciona y en el cual ha de tomar las decisiones. Estos son los tres elementos básicos para definir lo que podríamos llamar la matemática actuarial con concepción interdisciplinal. El entorno socio-económico al que nos hemos

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Apuntes de Matemática Actuarial. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Madrid, 1970

referido conlleva aspectos de tipo legal que con frecuencia condicionan, como se tendrá ocasión de ver en la última parte de este trabajo, la propia política de tarifas. Así, por ejemplo, hay ramos para los que el ordenamiento jurídico establece que todas las entidades habrán de aplicar la misma tarifa. En otros casos es el propio mercado el que está informado por prácticas más o menos monopolísticas, por lo que, siendo a priori el precio del seguro una variable de decisión, se convierte, de hecho, en un dato (una tarifa uniforme). En definitiva, no se puede, o, al menos, no se debe analizar las operaciones de Seguro sin hacer apelación a quién las lleva a cabo (componentes subjetivas) y dónde y cuándo las lleva a cabo (componentes ambientales).

Resumiendo los conceptos que se han venido desarrollando en las líneas anteriores, podemos decir que la Concepción Clásica queda totalmente rebasada por la magnitud, cantidad e interrelación de los problemas inmanentes en el mundo del Seguro, u de la propia naturaleza en general, y que el análisis y resolución de tales problemas precisan de una técnica y una metodología distinta a la presentada por dicha concepción. Como dice Ángel Vegas Pérez en el prólogo al que antes se ha hecho mención, han de tenerse en cuenta las siguientes circunstancias:

"a/ Que los objetivos en la empresa no son únicos y aparecen jerarquizados. Además, y a la vista de las informaciones, van cambiando de naturaleza.

b/ Que a la empresa hay que concebirla como un Sistema Complejo, en donde cada Sistema, Subsistema y Elemento aparecen convenientemente interrelacionados, formando un todo unitario. Las propiedades del Sistema Total pueden ser diferentes de las de sus partes.

c/ Que las perturbaciones e informaciones del medio exterior son múltiples, y no pueden, o no conviene (por razones de economicidad), someterse cada vez al centro de decisión.

d/ Que el problema no es tanto el de saber la mejor decisión, en cada periodo, como el de construir un mecanismo que actué de forma efectiva.

De aquí la importancia de la Concepción Cibernética, la cual pone su acento:

a/ En los múltiples objetivos de la empresa, que deben mantenerse dentro de unos determinados límites (Planificación).

b/ En los problemas estratégicos y en la definición de estructuras de la empresa (Organización).

c/ En el comportamiento del Sistema, y por tanto, en los flujos de información (Comunicación), y

d/ En la colocación de reguladores a diversos niveles, encargados de limitar la influencia de las perturbaciones inciertas y sobre las cuales se puede actuar para lograr los objetivos deseados, manteniendo las variaciones esenciales del Sistema dentro de los límites básicos, a pesar de las perturbaciones exteriores (Control).

Es decir, relaciona las cuatro funciones básicas que se dan en todo proceso de dirección: Planificación - Organización - Comunicación- Control, y de cuya coordinación depende el que se alcancen los objetivos de la empresa".

Sobre este mismo orden de ideas, afirma Jesús Vegas Asensio (1) que "en la concepción moderna del problema actuarial, el ente asegurador, o, en general, el empresario, si consideramos la empresa como unidad de decisión con riesgo, actúa como decisor en ambiente de riesgo (las decisiones dan lugar a consecuencias con distribución de probabilidad conocida por el decisor) o de incertidumbre (ley de probabilidades desconocida), necesitando captar la máxima información del medio en que actúa y tener en cuenta las posibles interrelaciones entre los flujos de información del ambiente, sus posibles estados y sus respuestas a las acciones del decisor. Es decir, la concepción del ente asegurador como Sistema de Información-Decisión. De ahí nos surge la necesidad de ir incorporando la sucesiva información del ambiente (con

(1) Vegas Asensio, Jesús: La empresa aseguradora como servosistema. Seguros nº 45. Enero-Marzo, 1973. Pag. 11-28

su grado de "credibilidad") al caudal de conocimientos (con su grado de "fiabilidad") que posee el decisor para la toma de decisiones".

En definitiva, las ideas que conforman la Concepción Clásica aparecen actualmente superadas por una nueva Concepción, la Concepción Sistema o Enfoque Sistémico, que introduce los elementos correctores a las modelizaciones clásicas que devinieron en inútiles y obsoletas, y cuyas notas características podemos resumir en los siguientes puntos:

a/ En primer lugar, se procede a una integración de ambientes. Los fenómenos se estudian no por ambientes aislados sino por ambientes integrados. Por esta razón se dice que la Concepción Sistema es una concepción transdisciplinal o interdisciplinal. En el caso de nuestro análisis de los costes y precios del riesgo, por ejemplo, se presentan unos aspectos técnico-estadísticos, cuales con el análisis de las distribuciones básicas del proceso de riesgo, análisis del coste estadístico; aspectos, así mismo, económico-empresariales, cuales son los de la estabilidad de la empresa aseguradora, los costes de tal estabilidad, el reaseguro, etc., y hay, por último, aspectos de entorno, entre los que destacan los de tipo legal. Tales ambientes, que en la concepción clásica aparecían aislados e independientes, ahora aparecen integrados. Tal es el primer elemento característico de la Concepción Sistema, Enfoque Sistémico o Teoría General de Sistemas.

b/ En segundo lugar, podemos decir que, en la Concepción Sistema, el Sistema total aparece integrado por una serie de Subsistemas y Elementos interrelacionados entre sí, no independientes. Por ejemplo, la información estadística aparece como un subsistema de cualquier empresa; el almacén, o la sección de compras o de ventas dejan de aparecer como elementos independientes de la empresa, para pasar a constituirse en subsistemas del sistema total, que es la empresa, condicionados a los avatares del mercado del producto terminado. Como consecuencia de todo ello se puede afirmar que otra de las características del Enfoque Sistémico consiste en que el todo ya no coincide con la suma de las partes, poseyendo el todo propiedades que no están en las partes que lo integran. El

óptimo total no tiene porqué ser una suma de óptimos parciales, cuando éstos muchas veces no tienen carácter complementario.

c/ En tercer lugar, los objetivos, en una Concepción Sistema, ya no son únicos; por contra, en la mayoría de los casos, serán múltiples. Por ejemplo, en el caso de una empresa de seguros, aparecen claramente diferenciados dos objetivos: el objetivo beneficio y el objetivo estabilidad. Como una consecuencia lógica de la no unicidad de objetivos está la necesidad de su jerarquización, a efectos de decidir entre ellos, según un orden de preferencia o importancia, dado que los medios para alcanzar dichos objetivos serán siempre escasos. Es conveniente elaborar un grafo que explicita la jerarquización establecida de objetivos. Por ejemplo, en el caso al que anteriormente nos hemos referido de la empresa de seguros, dicha entidad debe decidir cuál objetivo, el objetivo estabilidad o el objetivo beneficios, va a tener un carácter preferente, va a ocupar el primer lugar en el grafo. Si se elige como preferente el objetivo estabilidad, el beneficio aparecerá subordinado a la misma, de tal forma que, para obtener el grado de estabilidad deseado, habrá que retener unos fondos que se constituyan en reservas de solvencia o estabilización, reservas que, aumentando la estabilidad, disminuyen obviamente el beneficio repartible. Si el orden jerárquico es el inverso, se invertiría el sentido del grafo representativo. En este ejemplo, resulta evidente la influencia, sobre la jerarquización de objetivos, del entorno, entorno legal en nuestro caso, al que nos referiremos a continuación como cuarta nota característica de la Concepción Sistema. En efecto, por ejemplo, en España, el ordenamiento jurídico vigente, exige, para el Seguro Obligatorio de Automóviles, la constitución de una reservas de estabilización por valor del 40% de los resultados técnicos positivos del Seguro directo, y para el Seguro voluntario de Automóviles, unas reservas de estabilización por el 25% de dicho tipo de resultados. Es evidente entonces que el entorno legal juega un papel importante en la dialéctica estabilidad-beneficio, no pudiendo el empresario decidir libremente su jerarquización, con independencia de la influencia de dicho entorno.

d/ El cuarto elemento diferencial de la Concepción Sistema es el entorno. En la Concepción Sistema se trabaja con un entorno de incertidumbre. Se nos plantea, a la hora de elaborar criterios de decisión, el problema de precisar si la incertidumbre característica del entorno es estructurable y probabilizable. La mayoría de las veces no lo será. Pero lo que es evidente es que la incertidumbre se neutraliza con información, con lo que pasan a un primer plano de importancia los flujos de información. Por ejemplo, en el proceso de elaboración de tarifas, si tuviéramos que establecer el precio en base a los costes, una de sus componenets sería el recargo de seguridad. ¿ Qué recargo de seguridad incluimos en la tarifa ?. Evidentemente, cuánto más recargo de seguridad se incluya en la tarifa, tanto más se encarecerá el precio del seguro, pero, por otra parte, más se estabiliza al ente asegurador. Como le recargo de seguridad, junto con las reservas de estabilización y el reaseguro son las tres magnitudes, los tres medios a través de los cuales se puede estabilizar a la empresa de seguros, magnitudes que, como tendremos ocasión de ver, cualquier teoría del riesgos relaciona con el índice de riesgo, también llamado probabilidad de ruina o probabilidad de estabilidad, si la información viene de los costes hacia los precios, el flujo de información tiene ese sentido, el recargo de seguridad es, entonces, una variable de decisión. Nos vemos obligados a decidir qué recargo de seguridad incluimos en la tarifa. Ahora bien, se puede conseguir el mismo nivel de estabilidad con un recargo de seguridad alto y con unas reservas de estabilización bajas que con un recargo de seguridad bajo y con reservas de estabilidad altas. Fijado el nivel de estabilidad deseado, ambas variables de estabilidad juegan el papel de sustitutivas, a través de una u otra se puede conseguir el mismo grado de estabilidad. La solución de fijar un recargo de seguridad alto y unas reservas de estabilidad bajas comporta el importante inconveniente de que se encarece el precio a costa de tener menos reservas. Por contra, si se incrementan las reservas de estabilidad, disminuyendo simultáneamente el volumen de recargo de seguridad, se consigue potenciar la dimensión de la empresa y, además, se consiguen precios más competitivos en el mercado. Este mismo tipo de flujo se puede establecer incluyendo la variable reaseguro. Reasegurar mucho supone incrementar los índices de estabilidad pero, por contra, ceder volúmenes importantes de negocio, lo cual puede ser antieconómico.

El circuito de información nos puede venir dado de otra forma. Por ejemplo, supongamos que en un ramo las tarifas son uniformes en el mercado, todas las empresas aplican las mismas tarifas. Tal sucede en muchos seguros, como, por ejemplo, los dos de Automóviles (obligatorio y voluntario) en España. Entonces, el recargo de seguridad, en vez de ser una variable de decisión, es una dato del entorno. Con ese margen de recargo de seguridad se puede conseguir una mayor o menor estabilidad, en función de los gastos de gestión interna y externa de la empresa aseguradora, y, así mismo, de la siniestralidad producida, pero es un dato. Las variables de decisión serán entonces el reaseguro y las reservas de estabilidad.

Como consecuencia de todo el análisis realizado, se concluye que los flujos de información son del mayor interés para la empresa. Al pasar a un primer plano de interés los flujos de información y las interrelaciones entre los elementos, lo que estudiarían las concepciones cibernéticas y las concepciones con enfoque sistémico son los comportamientos de los sistemas como un todo, más que los elementos que los integran. Esta es la filosofía básica de la Teoría General de Sistemas.

Como hemos indicado anteriormente cualquier teoría del riesgo relaciona el recargo de seguridad con las reservas de estabilidad, reaseguro e índice de riesgo o probabilidad de la misma. Profundicemos más en esta cuestión, analizando brevemente las teorías del riesgo fundamentales, que serán la teoría del riesgo individual y la teoría del riesgo colectivo.

I.2.1.- TEORIAS DEL RIESGO

Como indica Nieto de Alba en sus "Apuntes de Matemática Actuarial", el objeto de toda teoría del riesgo es el de proporcionar un modelo matemático de las fluctuaciones aleatorias, que permita discutir las medidas a tomar y analizar sus consecuencias. Se pueden señalar tres medios para pervenir desviaciones:

- a/ Recargo de seguridad (λ).
- b/ Constitución de reservas de estabilización o de seguridad (S), y
- c/ El reaseguro (M).

Estas medidas no han de llevarse más allá de lo necesario para alcanzar el equilibrio del ente asegurador, pues de lo contrario encarecerían el precio del seguro o disminuirían el beneficio de la empresa. Por otra parte, se puede conseguir el mismo grado de estabilidad con distintas combinaciones (λ, S, M) , con lo cual se presenta un problema de elección, que exige dar entrada a criterios económicos.

Toda teoría del riesgo relaciona las siguientes magnitudes:

- a/ Cartera (n° de pólizas, distribuciones básicas, grado de homogeneidad)..... = C
- b/ Reservas de estabilidad..... = S
- c/ Reaseguro..... = M
- d/ Recargo de seguridad..... = λ
- e/ Índice de estabilidad..... = ϵ

Es decir, se puede formular la siguiente relación:

$$\Psi \{S, M, \lambda, C, \epsilon\} = 0$$

De esta forma, para una cartera dada C y fijado el índice de estabilidad ϵ , se tiene una relación entre las otras tres magnitudes:

$$\phi \{S, \lambda, M\} = 0$$

Podemos distinguir las siguientes clases de Teorías del Riesgo:

Teoría del Riesgo Individual

La Teoría del Riesgo Individual condiera el riesgo total de la compañía como el resultado de lo que acontece a todas las pólizas individuales emitidas por la misma. En esta teoría, la ganancia o pérdida total de la compañía durante un periodo de tiempo considerado será la suma de todas las variables aleatorias asociadas a cada póliza individual existentes en la misma. De acuerdo con el Teorema Central del Límite, esta suma será aproximadamente normal, si el número de pólizas es grande.

Consideremos una Cartera formada por n pólizas distribuidas en h categorías :

$$n_1 + n_2 + \dots + n_h = n$$

Las pólizas de cada grupo se consideran homogéneas, es decir, la variante ξ_{ij} tiene la misma prima P_j y la misma varianza, σ_j^2 . La variante que recoge la siniestralidad total será:

$$\xi = \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^{n_j} \xi_{ij} \quad \text{con } m = E(\xi) = \sum_{j=1}^h n_j P_j$$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^h n_j \sigma_j^2, \text{ siendo:}$$

$$E(\xi_{ij}) = P_j \text{ y } \sigma^2(\xi_{ij}) = \sigma_j^2.$$

Admitiendo la aproximación normal para la variante ξ , se puede escribir:

$$P(\xi - m > k_\epsilon \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_\epsilon}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \epsilon$$

Los recargos de seguridad λ_j que han de llenar las primas P_j para prevenir desviaciones superiores a $k_\epsilon \sigma$, con una probabilidad prefijada de antemano (ϵ) deberán cumplir:

$$\sum_{j=1}^h n_j \lambda_j P_j > k_\epsilon \sigma = k_\epsilon \sqrt{\sum_{j=1}^h n_j \sigma_j^2}$$

Si dichos recargos fueran constantes, $\lambda_j = \lambda$, se tendría:

$$\lambda > \frac{k_\epsilon \sqrt{\sum_{j=1}^h n_j \sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^h n_j P_j}$$

Cuanto más pequeño sea ϵ , tanto mayor será k_ϵ , y, por tanto, aumenta el recargo de seguridad mínimo.

Suponiendo que los fondos iniciales o reservas de estabilización son S , la probabilidad de ruina será:

$$P(\xi - m > S + \sum_{j=1}^h n_j \lambda_j P_j) = P\left\{ \frac{\xi - m}{\sigma} > \frac{S + \sum_{j=1}^h n_j \lambda_j P_j}{\sigma} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{J(S, \lambda, \sigma, \epsilon)}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \epsilon$$

en donde:

$$J(S, \lambda, \sigma, \epsilon) = \frac{S + \sum_{j=1}^h n_j \lambda_j P_j}{\sigma}$$

recibe el nombre de Índice de riesgo.

Con la introducción del reaseguro (M) tendremos ya relacionadas todas las magnitudes de estabilidad. Considerando que el argumento (M) deja a las variables entas de reaseguro, se puede escribir:

$$P\left(\frac{\xi(M) - m(M)}{\sigma(M)} \leq \frac{S + \sum_{j=1}^n n_j \lambda_j P_j(M)}{\sigma(M)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} J(S, \lambda, \sigma(M), \epsilon) e^{-t^2/2} dt = \epsilon$$

en donde el índice de riesgo, es:

$$J(S, \lambda, \sigma(M), \epsilon) = \frac{S + \sum_{j=1}^n n_j \lambda_j P_j(M)}{\sigma(M)}$$

en donde ya están relacionadas las magnitudes de estabilidad (la Cartera a través del número de pólizas, volumen de primas y varian-za). El mismo índice de estabilidad, ϵ , se puede alcanzar actuan-do sobre S, λ ó M. Esta indeterminación técnica se resolverá dan-do entrada al criterio económico.

Inconvenientes de la Teoría del Riesgo Individual

A la Teoría del Riesgo Individual se le suelen señalar los siguientes inconvenientes fundamentales:

- a/ La Cartera tiene una movilidad que sificulta su aplicación.
- b/ Los capitales en riesgo, en el seguro de vida, varían de un año para otro.
- c/ La teoría no puede dar respuesta a preguntas como la sgüiente:
¿Cuál es la probabilidad de que la compañía se arruine en el futuro ?.
- d/ Si los grupos homogéneos son de pequeño tamaño, no es posible la aplicación del Teorema Central del Límite.

No obstante, con la ayuda de esta teoría, se han podido aclarar los problemas fundamentales que subyacen en la estructura de la estabilidad del ente asegurador, así como su aplicación al Reaseguro.

Teoría del Riesgo Colectivo

El primer trabajo con la denominación de riesgo colectivo fue publicado por Filip Lundberg en 1903. Le llamó colectivo porque únicamente interviene, como un todo, la colectividad de los asegurados. Ello se contrapone a la manera de pensar individual, que se fije primordialmente en el riesgo correspondiente a cada póliza o asegurado. Este mismo autor presentó, en el año 1909, un trabajo al Congreso Internacional de Matemática del Seguro, celebrado en Viena, en el que consideraba el acaecimiento del riesgo de una cartera de seguros como una contingencia entre el ente asegurador, por una parte, y la totalidad de los asegurados por otra. Estos trabajos de Lundberg han sido los que han iluminado el camino a seguir por sus sucesores. Es preciso tener en cuenta que Lundberg investigaba procesos estocásticos con incrementos independientes sin disponer de la teoría de los procesos estocásticos. Posteriormente, esta Teoría del Riesgo Colectivo se ha asentado en una sólida base matemática y estadística gracias a los trabajos de Harald Cramér y su escuela. Son de destacar, en este sentido, las aportaciones de De Finetti, recogidas en trabajos como "La teoría del rischio e il problema della rovina dei giocatori" (1939), "Il problema dei pieni" (1940), etc., en las que lleva el tema della teoría del riesgo al problema clásico de la ruina de los jugadores. La relación entre estos dos problemas es evidente; en ellos, la relación entre el asegurador y la masa de asegurados constituye un juego. Se pueden señalar dos aspectos interesantes en el planteamiento de De Finetti, en los que difiere de la escuela sueca: En primer lugar, la mayor atención que presta al planteamiento estocástico del problema de la ruina, frente al planteamiento más matemático de Cramér. En segundo lugar, una concepción más económica del problema. De Finetti establece que, de todas las decisiones que tengan una misma probabilidad de ruina, se ha de elegir aquella que rinda el mayor beneficio posible a la compañía. Se ha de considerar a la empresa de seguros como lo que es, es decir, como un ente económico cuya finalidad es la obtención de beneficios. En este sentido, son insuficientes los criterios meramente técnicos y estadísticos, ha de darse entrada a los criterios económicos.

Elementos fundamentales de la teoría del riesgo colectivo son:

a/ Opera con sumas de riesgos tanto positivas como negativas

b/ Opera con un tiempo t llamado operacional, en donde t es el número medio de siniestros en el tiempo físico $(0, \tau)$. Por ejemplo, $t=200$ equivale a dos años para una entidad que tenga 100 siniestros, de media, al año.

c/ Ocurrido un siniestro, dará lugar a una indemnización de cuantía X_k . Esta variable aleatoria tendrá una distribución definida por la función de distribución $V(x)$, independiente del tiempo. Representaremos por c_v al momento de orden v con relación al origen de esta distribución, es decir,

$$c_v = \int_0^{\infty} x^v dV(x), \text{ siendo } C_1 \text{ la media de la distribución.}$$

Representaremos a la función característica por $V(u)$,

$$V(u) = \int_0^{\infty} e^{iux} dV(x)$$

El elemento fundamental de la teoría es el proceso de riesgo, representado por la variante $X(t)$, que expresa el pérdida total acaecida en $(0, t)$,

$X(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, siendo n la variante asociada al número de siniestros ocurridos en el tiempo $(0, t)$.

Se suele considerar que el proceso de riesgo satisface las hipótesis siguientes:

- 1/ Es un proceso de incrementos independientes, lo que supone que las variantes $X(t_0+t) - X(t_0)$ y $X(t_1+n) - X(t_1)$ son independientes. Ello equivale a suponer que el acaecimiento y la cuantía de un siniestro no tienen influencia en el acaecimiento o cuantía del siniestro siguiente.
- 2/ Es un proceso de incrementos estacionario, lo que supone que $X(t_0+t) - X(t_0)$ depende solamente de t y no de t_0 . Es decir, se supone que los riesgos son independientes del tiempo, es decir, que el número de siniestros y su cuantía no dependen de que estemos situados, por ejemplo, en el año 60 ó en el 70.
- 3/ Las funciones muestrales del proceso son funciones de salto. Ello supone que, acaecido un siniestro, se paga inmediatamente.

Así pues, suponiendo que en $(0, t)$ se han producido n siniestros, la pérdida total que comportan vendrá dada por: $X(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Partiendo de que se verifica $X(0) = 0$, la distribución del daño total correspondiente a dicha variante $X(t)$ vendrá definida por la función de distribución:

$$F(x, t) = P\{X(t) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V^{n*}(x)$$

en donde $V^{n*}(x)$ es la convolución n -ésima de la función $V(x)$, $V^{n*}(x) = \int_0^x V^{(n-1)*}(x-z) dV(z)$, siendo $V^*(x) = V(x)$.

$P_n(t)$ expresa la probabilidad de que, en el tiempo operacional t , se produzcan n siniestros, distribución que, fundamentalmente, será de Poisson (con parámetro t),

$$P_n(t) = \frac{t^n}{n!} e^{-t}$$

o bien binomial negativa: $P_n(t) = \binom{-h}{n} \left(\frac{-t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)$

La función característica de la distribución del daño total será:

$$\phi(u) = \int_0^{\infty} e^{iux} dF(x, t) = \phi_n\{V(u)\}$$

que, para el caso de Poisson, será: $\phi(u) = e^{t\{V(u)-1\}}$, y para el caso de la distribución binomial negativa será:

$$\phi(u) = \left\{1 - \frac{t}{h} (V(u)-1)\right\}^{-h}$$

función característica que, desarrollada en serie, nos permite obtener los siguientes momentos fundamentales de la distribución del daño total:

	<u>Poisson</u>	<u>Binomial Negativa</u>
Media (α)	tC_1	tC_1
Varianza (μ_2)	tC_2	$tC_2 + (tC_1)^2/h$
μ_3	tC_3	$tC_3 + 3t^2C_1C_2/h + 2(tC_1)^2/h^2$

Es de un gran interés, en esta teoría, el tema de las aproximaciones a la distribución del daño total, tales como las aproximaciones normales o las de Esscher. Sobre ellas, como sobre el tema del proceso de riesgo, se establecerá un análisis suficientemente detallado en la parte segunda del presente trabajo.

Un tema de gran importancia, que se plantea y analiza de manera adecuada a través de la teoría del riesgo colectivo es el de la ruina de la empresa aseguradora, y su análisis a través del proceso de ruina. La distribución del daño total nos permite plantear y resolver problemas, con criterio de estabilidad, pero referidos a decisiones a corto plazo. Es al dar entrada a otras dos magnitudes de estabilidad, cuales son las reservas o fondos de estabilidad (S) y el recargo de seguridad (λ), y al plantear el problema de la ruina de la empresa, cuando obtendremos los criterios de estabilidad más aptos para establecer decisiones a largo plazo. El modelo básico a utilizar es el del proceso de ruina, que estableceremos de la siguiente forma: El importe de los fondos acumulados en el periodo $(0, t]$ vendrá dado por:

$$Z(t) = S + (1 + \lambda) P - X(t),$$

siendo $P = C_1 t$ y $X(t)$ la variable asociada a la siniestralidad total en dicho periodo. Llamaremos a : $Y(t) = (1 + \lambda) P - X(t)$, función ganancia en $(0, t)$. En el momento t_0 en que se verifique $Z(t_0) < 0$, se dirá que se ha presentado el suceso ruina. Las hipótesis básicas para el proceso de ruina $Z(t)$ serán las mismas que para el proceso de riesgo $X(t)$, es decir, serán un proceso de incrementos independientes y estacionarios. Se llamará probabilidad de ruina a la probabilidad de que se presente el suceso ruina en el futuro. Se demuestra que esta probabilidad de ruina, ϵ , verifica la relación:

$$\epsilon \leq e^{-RS}$$

en donde R se obtiene de la relación: $E(e^{-RY(t)}) = 1$

Teniendo en cuenta que la función característica de $X(t)$ es: $\phi_X(u) = \phi_n\{V(u)\}$, y que $Y(t) = (1 + \lambda) P - X(t)$, el valor de R se obtiene de la relación:

$$E(e^{-R\{(1+\lambda)P - X(t)\}}) = e^{-R(1+\lambda)P} E\{e^{RX(t)}\} = 1$$

es decir:

$$e^{(1+\lambda)RP} = E\{e^{RX(t)}\} = \phi_1\{V(R)\}, \text{ siendo:}$$

$$V(R) = \int_0^\infty e^{RX} dV(x).$$

ϕ_n es la función característica de la distribución del número de siniestros, que hemos de suponer que se trata de un proceso de Poisson, al haber establecido las hipótesis de independencia y estacionariedad del proceso, por lo que tendremos:

$$e^{(1+\lambda)RP} = \phi_n\{V(R)\} = e^{t\{V(R)-1\}}$$

es decir, que R se obtendrá de la relación:

$$V(R) = \int_0^\infty e^{RX} dV(x) = 1 + (1+\lambda) RC_1.$$

Segerdahl (1) ha demostrado que la probabilidad de ruina para un periodo de tiempo ilimitado es prácticamente la misma que correspondería a un periodo limitado de unos diez años.

La última variable de estabilidad con la que puede jugar el ente asegurador para conseguir tal objetivo es el reaseguro. Las principales modalidades de reaseguro se pueden resumir en las siguientes:

- 1/ Reaseguro de sumas o riesgos. En él, la cesión es proporcional al riesgo corrido por la cedente, por lo que son proporcionales e individuales. Entre este tipo de reaseguro se encuentran el cuota-parte, el excendente y el mixto.
- 2/ Reaseguro de pérdidas o siniestros. En estas modalidades, las cesiones ya no se fijan en proporción a las sumas aseguradas. Por eso se dice que son No-proporcionales. Entre ellos se encuentran el de "Exceso de pérdidas" o "Excess-loss" y el de "Exceso de siniestralidad" o "Stop-loss".
- 3/ Otras formas de reaseguro. Entre ellas se encuentra el "Pool", que consiste en una formación de Consorcios reaseguradores, a los efectos de ampliar la capacidad de aceptación. Un hecho que ha dado lugar a la aparición de nuevas modalidades ha sido la inflación. Han surgido, con ese motivo, las modalidades ECOMOR (excedente del coste medio relativo) y EPNOC (Excess Premiums related claims).

(1) Segerdahl, C.O.: When does Ruin Occur in the Collective Theory of Risk ?
Skand. Aktuar. 1955.

El proceso de reaseguro tiene unas repercusiones en la Cartera y en las ecuaciones de estabilidad que es preciso poner de manifiesto. Estudiemos la influencia de las distintas modalidades en las distribuciones básicas y del daño total. Las distribuciones y variables afectadas de reaseguro se representarán mediante subíndice cero. De esta forma, tendremos:

Reaseguro		Antes	Después
Cuota-parte	Distrib. cuantías	$V(x)$	$V_0(x)$
Excedente	Coste medio	$C_1 = \int_0^\infty x dV(x)$	$C_1^0 = \int_0^\infty x dV_0(x)$
Excess-loss	Primas retenidas	$P = tC_1$	$P_0 = tC_1^0$
Stop-loss	Dist. daño total	$F(x, t)$	$F_0(x, t)$
	Primas retenidas	$P = \int_0^\infty x F(x, t)$	$P_0 = \int_0^\infty x dF_0(x, t)$

a/ Reaseguro cuota-parte. Siendo $1/k$ (para $k > 1$) la cuota retenida por el cedente, se tendrá:

$$V_0(x) = V(Kx)$$

$$P_0 = t \int_0^\infty x dV_0(x) = t C_1^0 = (1/K)P$$

$$V_0(R) = \int_0^\infty e^{Rx} dV_0(x) = \int_0^\infty e^{Rx/k} dV(x)$$

b/ Reaseguro de excedente. La influencia del reaseguro sobre la distribución de la cuantía de un siniestro, $V(x)$, será: expresando por $q(s)ds$ la probabilidad de que, acaecido un siniestro, la suma asegurada esté en $(S, S+ds)$, y por $P_s(x)dx$ la probabilidad condicionada de x (cuantía del siniestro) a S , se tendrá:

$$V_0(x) = \int_0^M q(s)P_s(x)ds + \int_M^\infty q(s) \frac{S}{M} P_s(x/M)ds$$

donde M expresa el pleno de conservación.

c/ Reaseguro excess-loss con pleno M . Se tendrá:

$$dV_0(x) = \begin{cases} dV(x) & \text{para } x < M \\ \int_M^\infty dV(x) & \text{para } x = M \end{cases}$$

$$P_0 = t \int_0^\infty x dV_0(x) = t \left\{ \int_0^M x dV(x) + M \int_M^\infty dV(x) \right\} = tC_1^0$$

$$V_0(R) = \int_0^M e^{Rx} dV(x) + e^{RM} \int_M^\infty dV(x)$$

d/ Reaseguro Stop-loss con pleno N. En esta modalidad resulta afectada la distribución total de la siguiente forma:

$$d F_0(x, t) = \begin{cases} d F(x, t) & \text{para } x < N \\ \int_N^{\infty} d F(x, t) & \text{para } x = N \end{cases}$$

$$P_0 = \int_0^N x d F(x, t) + N \int_N^{\infty} d F(x, t)$$

La relación que existe, después de introducir el reaseguro, entre las magnitudes de estabilización será:

$$e \approx e^{-RS}$$

$$e^{(1+\lambda)P_0 R} = \int_0^{\infty} e^{Rx} d F_0(x, t) = \begin{cases} e^{t\{V_0(R)-1\}} & \text{en el caso de Poisson} \\ \{1 - \frac{t}{h} (V_0(R)-1)\}^{-h} & \text{en el caso de la binomial negativa} \end{cases}$$

$$\text{siendo: } V_0(R) = \int_0^{\infty} e^{Rx} d F_0(x)$$

Los tres problemas fundamentales que se presentan en el reaseguro son: a) Fijación del sistema o modalidad de reaseguro. b) Fijación del pleno, y c) Cálculo de la prima para las distintas modalidades y una vez fijados los plenos. Los dos primeros problemas son de elección y requieren la existencia de un criterio que nos permita tomar la mejor decisión. Estamos ante un criterio de estabilidad cuando se tiene en cuenta la separación de cada decisión en el índice de estabilidad. Con arreglo a este criterio, y para un mismo volumen de primas de propia retención, las modalidades dan mayor estabilidad por el siguiente orden: Stop-loss, Excess-los, Excedente y Cuota-parte.

Insuficiencia de los criterios de estabilidad

En los "Apuntes de Matemática Actuarial" de Ubaldo Nieto de Alba, de los que venimos haciendo frecuente uso en esta parte general de las Teorías del Riesgo, se dice, respecto al tema de la insuficiencia de los criterios de estabilidad, lo siguiente: "Cuando la misma se intenta aplicar a los problemas que se presentan

en la empresa de seguros, encuentra limitaciones. De aquí han derivado las críticas principales a la misma. Veamos algunas de éstas:

a/ Para calcular una magnitud de estabilización (Recargo de seguridad, Reserva de estabilización o Reaseguro), qué criterio se utiliza: el criterio F (distribución en un periodo fijo) o el criterio ϕ (función de ruina).

b/ Otra crítica importante (Ottoviani, Finetti, Tedeschi, etc.) es la de que en el criterio ϕ se considera una acumulación indefinida de las Reservas que es incompatible con la finalidad del empresario, que persigue un beneficio repartible.

c/ Cuando se le da entrada al empresario, surge la necesidad de considerar sus preferencias, lo que ha dado lugar a la teoría de la utilidad en el seguro (Borch, Khan, Wolff, etc.).

En ocasiones se dice que la teoría es muy restringida, ya que a medida que se van acumulando Reservas, el recargo de seguridad debe disminuir, y entonces se plantea su generalización, con su correspondiente dificultad matemática. Todo ello sin tener en cuenta que se están relacionando dos variables con arreglo a un criterio, el de estabilidad, que resulta insuficiente cuando se consideran las interrelaciones entre los distintos sistemas y subsistemas que integran el sistema actuarial total de la empresa de seguros.

La insuficiencia de los criterios de estabilidad se pone de manifiesto a través de las consideraciones económicas siguientes:

a/ Contemplando la producción del servicio de seguridad en su doble aspecto: técnico y económico. b/ Dando entrada a los supuestos de racionalidad del sujeto económico (empresario) que lleva a cabo tal proceso productivo, y c/ Teniendo en cuenta el ambiente en que éste toma sus decisiones (Orden Económico-Social y Mercado)".

En efecto, hemos intentado poner de manifiesto que, a través de cualquier teoría del riesgo, se relacionan las siguientes variables y subsistemas: La estructura estadística de la Cartera, que se compone de la distribución del número de siniestros, del

coeficiente de heterogeneidad (el coeficiente h de la distribución de polya, que posteriormente se analizará en la parte segunda de este trabajo), el número de pólizas, cuantía de las pólizas, ect., índice de estabilidad; las tres variables de estabilidad: recargo de seguridad, reservas de estabilidad y reaseguro. Cualquier teoría del riesgo relaciona matemáticamente estas tres magnitudes. El problema es: ¿ podemos tomar decisiones en base sólo a lo establecido por las teorías del riesgo ?. Ciertamente no, es insuficiente esta información, como se pone de manifiesto en la concepción sistema, en la cual estaríamos sólo en un ambiente, que es el ambiente técnico. Es algo así como si pudiéramos tomar decisiones acerca de lo que vamos a producir en una empresa cualquiera, cómo vamos a producir y para qué vamos a producir exclusivamente con la información que nos diera el ingeniero del funcionamiento técnico de los procesos de producción de la empresa. Además de la producción desde el punto de vista técnico hay que contemplar a la producción desde un punto de vista económico. Como se dice en la presentación al trabajo de Nieto de Alba, " Concepción Cibernética en la Dirección Actuarial de la Empresa de Seguros", ya reseñado, "es necesario abandonar el concepto clásico del Actuario calculista producto de la Matemática de la Estabilidad estática del Seguro, al aparecer el principio de optimización que actúa como norte de la Matemática de la Decisión. En el cálculo de las operaciones, se pasa del principio de equivalencia estática (predominio de primas) al de equivalencia dinámica (predominio de reservas), y del principio de las vases técnicas de primer orden (seguridad implícita) a las de segundo orden (seguridad explícita)". Como decimos, ha de considerarse, además de la producción desde el punto de vista técnico, la producción desde el punto de vista económico, mediante la función de costes. No solamente se elige el proceso de producción más perfecto técnicamente, sino aquél que rinda más o tenga un coste mínimo, que es lo que llamamos producción desde el punto de vista económico. A su vez, hace falta introducir, en otra etapa posterior, al empresario. No solamente vamos a producir donde hay menor coste, sino que hay que considerar las propensiones del empresario al riesgo, introduciéndose entonces el concepto de beneficio. Según

la propensión que tenga o no el empresario al riesgo, maximizaremos, por ejemplo, la esperanza matemática del beneficio, o el propio beneficio, si lo consideramos en una concepción en ambiente de certidumbre. Exactamente las mismas consideraciones cabe hacer para la empresa y el empresario de seguros. En este caso, las teorías del riesgo quedan a nivel de lo que pudiéramos llamar la producción del servicio de seguridad desde el punto de vista meramente técnico. Hay que dar entrada a los costes y, posteriormente, al empresario, con sus preferencias, y, por último, al entorno en que el empresario actúa y decide, el entorno socio-económico en el que la empresa desarrolla su actividad. Por ejemplo, no solamente se da el caso de que las tarifas puedan estar uniformadas, con lo cual serían un dato del entorno, sino que también se puede dar el caso de que la empresa tenga una dimensión tan pequeña que el empresario carezca de poder de negociación con el reasegurador, de tal forma que éste le imponga sus condiciones, en la forma de modalidades de seguro a contratar, precios a aplicar, etc. Muchas veces sucede en empresas que están escasamente dimensionadas, en empresas pequeñas, que, como se encuentran ubicadas en un entorno de competencia, para determinadas modalidades de seguros colectivos que se sacan a oferta pública, tales empresas cotizan con tarifas previamente consultadas a los reaseguradores, a efecto de contar a priori con el reaseguro. Esto no sucedería si la empresa tuviese unas determinadas reservas de estabilidad y una gran dimensión, luego todos los problemas de dimensión, estabilidad y precios están fuertemente relacionados, no solamente en las distribuciones básicas de que se habla en el coste estadístico del riesgo, y no solamente también con todas las variables que están incidiendo en el equilibrio de la propia empresa, sino también en el entorno en el cual se están tomando las decisiones.

Por todas estas razones, podemos afirmar que estamos abocados a dar entrada a la Concepción Sistema. Vamos a ver a continuación, en el siguiente epígrafe, lo que es un sistema y las características fundamentales de la Teoría General de Sistemas, para aplicarlas en la parte tercera de este trabajo al análisis de la formación del precio del Seguro. El coste estadístico se obtiene independientemente de la empresa, las tasas de siniestralidad pueden

ser independientes de que el riesgo esté asegurado en una u otra empresa. A la hora de formar el precio, no sólo se forma con las tasas de siniestralidad, sino que se forma con el recargo de seguridad y con los recargos de gestión interna y externa, con lo que la formación del precio exige dar entrada a todos estos elementos en una concepción interdisciplinal, es decir, en una Concepción Sistema.

I.3.- CONCEPCION SISTEMA

Un sistema es un complejo organizado como un todo unitario. El término, obviamente, cubre un amplio campo de conceptos. En general, supone plan, método y ordenación del conjunto de elementos que integran una disciplina. Como dice Von Bertalanfly (1), en la historia existen ejemplos de hombres (Newton, Darwin, Keynes, etc.), que causaron un gran impacto en el pensamiento humano debido a que fueron capaces de conceptualizar y establecer interrelaciones entre fenómenos complejos e integrarlos en un todo unitario.

Cuando la realidad objeto de estudio es compleja, a la elaboración de modelos aplicables a los diferentes campos de su estudio es preciso superponer una marca (Sistema o Sistema de sistemas) que integra y relacione en un todo unitario las diferentes teorías particulares.

Es importante, pues, introducir el concepto de sistema aplicado a la teoría de decisiones en la empresa en general y en la Empresa de Seguros en particular (que es el concepto de "managiny by system"). Esta nueva concepción del proceso de dirección ha irrumpido de manera especial en la segunda mitad del presente siglo, contribuyendo en gran medida a ello, en primer lugar, los avances en el estudio de la informática como ciencia que

(1) Bertalanfly, Ludwing von: General System Theory: A New Approach to Unity of Science. Human Biology. 1951.

versa sobre la captación, procesamiento y utilización de la información en la teoría de decisiones óptimas, y en segundo lugar, la aplicación de los ordenadores electrónicos, como técnica al servicio de la dirección, lo que ha permitido la instrumentación de los sistemas cibernéticos de información-decisión, al conseguir la recogida de un volumen de datos extraordinariamente elevado, de forma semejante a como actúa un organismo humano.

Por todo ello, y junto al concepto básico de regulador, cuyo objetivo es mantener las variables esenciales del sistema dentro de los límites adecuados, previamente prefijados, y por muy diversas que sean las perturbaciones que influyen sobre dichas variables esenciales, un sistema automático de información-decisión consiste en considerar a la unidad de decisión como una estructura input-output lo más similar posible a un sistema biológico.

Al estudiar la Teoría de los Sistemas, hay que partir de su definición y estructura formal. En este sentido, y siguiendo a Zodej y Polak en su obra "Systems Theory", Sistema es un conjunto de pares input-output. Estado de Sistema en un tiempo dado es la información necesaria para determinar el comportamiento sucesivo del sistema. Objeto Abstracto es la expresión formal del hecho de que cualquier interacción con un objeto físico supone una variación en algunos atributos del objeto, que repercuten en variaciones de los otros atributos, siendo éstos observables. Los atributos que varían en principio juegan el papel de inputs (causas) y las variaciones resultantes son los outputs (efectos). Nuestra interacción con un objeto tiene lugar a través de las observaciones de las variaciones de sus atributos; la totalidad, pues, de tales observaciones constituyen el objeto abstracto.

Una propiedad muy importante es la invarianza en el tiempo. Esta propiedad significa que si consideramos el par input-output (u, v) perteneciente a un objeto abstracto Ω , hacemos una traslación temporal de amplitud δ al citado par, entonces el nuevo par input-output será (u_δ, v_δ) . Pues bien, Ω será un objeto abstracto invariante en el tiempo si, y sólo si, se verifica: $(u, v) \in \Omega \rightarrow (u_\delta, v_\delta) \in \Omega, \forall \delta$ (siendo δ un número real). Dicho de otro modo, Ω es invariante en el tiempo si, y sólo si, el conjunto $\Omega = \{u, v\}$ es un conjunto cerrado respecto a la operación de traslación temporal.

Sin embargo, pronto nos encontramos con que esto no es suficiente al aplicar la Teoría de los Sistemas a la Empresa en donde hay tal número de variables que influyen en el estado del sistema que no podemos conocer la estructura del mecanismo T de la transformación del Sistema del momento t al momento $t+1$, es decir, $E_{t+1} = T(E_t)$, siendo E_t el estado del sistema en t . Cuando en E_t se recogen los flujos de información que, actuando sobre el Estado del Sistema en t , originan el nuevo estado en el momento $t+1$ (E_{t+1}), y se establece directamente la correspondencia entre dichos flujos de información y los sucesivos estados del sistema, sin hacer hipótesis sobre la estructura interna del mecanismo T , entonces aparece el concepto de Caja Negra, básico en toda concepción Cibernética; y esto es precisamente lo que ocurre en la empresa, donde al haber tantas entradas (inputs), para obtener las decisiones óptimas (outputs) se deberá seleccionar la información que realmente se necesite, olvidando los detalles superfluos y buscando en el análisis de la Caja Negra leyes estadísticas, todo ello con el objeto de elaborar un mecanismo que actúe siempre de la forma más efectiva, es decir, lo más parecido posible a un ser vivo.

Bajo esta concepción, vemos cómo los outputs del sistema en un momento dado podrían ser inputs en el momento siguiente (feedback o retroalimentación), es decir, las decisiones que se tomen influirán sobre el ambiente y sus respuestas condicionarán las futuras acciones del decisor.

En los últimos años, se han hecho nuevos enfoques a fin de mejorar la administración; por ejemplo, mediante la teoría de la organización, la teoría de la decisión o la teoría de la planificación. Sin embargo, subsistía la necesidad de una teoría verdaderamente eficaz y es ésta precisamente la ciencia de la administración mediante sistemas.

La Teoría de Sistemas no es, sin embargo, nueva, sino que parte de ella se ha desarrollado y utilizado durante muchos años en las ciencias naturales. Su importancia actual radica en su aplicación a la empresa como unidad de decisión y su vinculación a la Concepción Cibernética y a las técnicas recientes de automoción. En efecto, no

debemos olvidar que fue Norbert Wiener (1) quien, en 1948, descubrió los caracteres de la cibernética, para extender posteriormente el campo de dicha teoría a las sociedades humanas, hallándonos ahora con el uso de los computadores como fieles instrumentos de tales teorías.

Respecto al concepto de "sistema", podemos decir que para Johnson, Kast y Rosenzweig, en su obra clásica "The Theory and Management of Systems", el término "sistema" cubre una gama extraordinariamente amplia de conceptos. Por ejemplo, tenemos sistemas orográficos, sistemas fluviales y también el sistema solar como parte de nuestro medio circundante. El cuerpo humano es, en sí mismo, un organismo complejo que incluye los sistemas óseo, circulatorio, nervioso, etc. A diario establecemos contacto con fenómenos tales como sistemas de transportes, sistemas de comunicación, (teléfono, telégrafo, etc.) y sistemas económicos.

El reverso de lo sistemático es lo caótico. Una situación caótica puede ser descrita como aquella en la cual todo puede depender de cualquier cosa. Puesto que dos de las mayores metas de la ciencia y de la investigación en cualquier área temática son la explicación y la predicción, la condición caótica no puede ser tolerada. Por lo tanto, existe un interés considerable por desarrollar conjuntos de conocimientos que puedan ser organizados dentro de un todo complejo, dentro del cual las subpartes y subsistemas puedan ser interrelacionados.

Existe una jerarquía obvia de sistemas que se pueden crear, esto es, sistemas, sistemas de sistemas y sistemas de sistemas de sistemas. La vida humana está formada de microorganismos que forman sistemas mayores, que, a su vez, son subsistemas del organismo considerado como un todo. Así, la atención ha sido enfocada cada vez más sobre sistemas completos tomados como marco de referencia, para trabajos analíticos en diversas áreas.

La teoría general de sistemas se ocupa del desarrollo de un marco teórico-sistemático para la descripción de las relaciones

(1) Wirrner, Norbert: Cybernetics and Society. 1952.

generales del mundo empírico. Es evidente la existencia de un amplio aspecto de logros potenciales para tal obra. Existen similitudes en la construcción teórica de varias disciplinas. Se pueden desarrollar modelos que tienen aplicación a muchos campos de estudio. Una meta final, pero distante, será una estructura (o sistema de sistemas) que pudiera entrelazar conjuntamente todas las disciplinas dentro de una relación significativa.

Una de las razones más importantes para señalar la necesidad de una teoría general de sistemas es el problema de comunicación entre las varias disciplinas. Aunque hay una similitud entre los métodos generales de enfoque - el método científico - , los resultados de los esfuerzos de investigación a menudo no se comunican dentro de las áreas disciplinarias limítrofes. Por lo tanto, la formación de conceptos e hipótesis que se hacen en un área se lleva muy pocas veces dentro de otras áreas, donde posiblemente pudiera señalar los caminos hacia una meta importante. Parece evidente que los especialistas no se comunican unos con otros. Esto, que ha sido descrito con gran acierto por Kenneth Boulding en su obra "General Systems Theory: The Skeleton of Science" (1), ha dado, sin embargo, paso a cierta intensificación de los estudios interdisciplinarios. Por ejemplo, la Cibernética, ciencia de la comunicación y del control, requiere de la ingeniería electrónica, de la física, de la biología, de la economía, de la sociología y de otros campos. Para que este movimiento interdisciplinar no degenera en una aproximación no sistemática, se impone el desarrollo de un marco general, dentro del cual se puedan integrar las diferentes subpartes.

En una primera aproximación, se pueden establecer modelos generales que corresponden a fenómenos comunes. En una segunda aproximación, es preciso establecer una jerarquía de niveles de complejidad para las unidades básicas de conducta en los varios campos empíricos. Ello supondría la elaboración de un nivel de abstracción para representar cada etapa. Como esta segunda apro-

(1) Boulding, Kenneth: General Systems Theory: The Skeleton of Science. Management Science. Abril, 1956

ximación es la que nos va a interesar en las aplicaciones, veamos la siguiente jerarquía de niveles, establecida por Boulding, en el trabajo al que anteriormente nos hemos referido:

1/ El de estructura estática: Está en la geografía y la anatomía del universo. Constituye la primera aproximación del conocimiento teórico organizado, y sin una descripción exacta previa no es posible ninguna teoría dinámica o funcional.

2/ El segundo nivel de análisis sistemático es el del simple sistema dinámico con movimientos necesarios predeterminados. La mayor parte de las estructuras teóricas de la física, química y aún de la economía caen dentro de este nivel.

3/ Este nivel se diferencia del sistema de simple equilibrio estable anterior en el hecho de que la transmisión e interpretación de la información es una parte esencial del sistema. Estamos en presencia del sistema cibernético.

4/ A partir de aquí nos encontramos con los sistemas abiertos de estructura automantenida. En este nivel comienza la vida a diferenciarse de lo estrictamente técnico. Pasando por el reino vegetal y animal, se llega al nivel humano, es decir, al individuo considerado como sistema. No obstante, es preciso tener en cuenta que mientras la Cibernética asume en la técnica una función productiva, en la biología, contribuye a la explicación de los hechos.

Los procesos de regulación biológicos son más mecánicos que técnicos, pues mientras en estos últimos existen decisiones primarias (que presuponen la existencia del ingeniero, director, etc.), en los reguladores biológicos no existen estas magnitudes de dirección que no están influidas por la regulación. Es lo más perfecto en cuanto a mecanismos: la máquina que funciona sin intervención y corrección.

La convicción de que el acelerado incremento del saber humano efectuado en el transcurso del pasado siglo no es debida a la labor de unos pocos sabios de conocimientos universales, sino que va en aumento, ha llegado a imponerse de manera general. Pero desde hace algunos años, la Cibernética empieza al mismo tiempo a servir de puente entre las distintas especialidades, haciendo resaltar las estructuras que son comunes a todas ellas. Con ello, la

Cibernética aspira a una síntesis entre la universalidad exigida por el ideal de la cultura general y la precisión que caracteriza a la especialización.

En un repaso, forzosamente somero, a lo que es la Teoría General de Sistemas, no puede faltar una apelación explícita a Ludwig von Bertalanffy como creador e impulsor de la misma. En efecto, la denominación de "Teoría General de Sistemas" y los conceptos fundamentales que la configuran se deben al biólogo Ludwig von Bertalanffy, quién puede ser considerado como el padre de esta nueva Teoría. La gran mayoría de los autores que han estado relacionados con el concepto de sistema han desarrollado sus ideas a partir de los conceptos expuestos por Bertalanffy, especialmente en sus obras "The Theory of Open Systems in Physics and Biology Science" (1950), "General Systems Theory: A New Approach to Unity of Science" (1951), y "Problems of Life" (1952). Posteriormente, en 1962, Bertalanffy escribió un artículo, "General Systems Theory: a critical review", donde expone la evolución de sus ideas desde sus primeros escritos hasta la fecha de la citada publicación.

Los motivos que condujeron a Bertalanffy a la elaboración de sus Teorías se pueden sintetizar en los siguientes puntos:

a/ Hasta décadas recientes, el campo de la ciencia, en su esfuerzo por establecer un sistema de leyes predictivo y explicativo, era prácticamente idéntico al de la física teórica. Sin embargo, en la actualidad, las ciencias biológicas, sociales y del comportamiento se han encontrado a sí mismas, apareciendo problemas particulares donde la aplicación de la física no es suficiente o posible.

b/ En las ciencias sociales y del comportamiento, existen cuestiones que fueron eludidas por la ciencia clásica. Conceptos tales como "organización", "dirección", "teleología", etc., no aparecen en el sistema clásico de la ciencia. En realidad, en el llamado punto de vista mecanicista del mundo, estos conceptos se consideraban como ilusorios o metafísicos. Esto significaba, por ejemplo, que para el biólogo, solamente los problemas específicos de la naturaleza viviente eran propios del legítimo campo de su ciencia.

c/ La ciencia clásica consideraba esencialmente problemas de dos variables, una causa y un efecto, o, a lo más, un pequeño número de variables. Sin embargo, muchos problemas planteados en las Ciencias Sociales son esencialmente multivariantes, por lo que se necesita de nuevos métodos de aproximación. Para Weaver y Shannon (1), la ciencia clásica se basaba en los principios de casualidad lineal determinista (estímulo-reacción), o en el estudio de complejidades desorganizadas. Esta segunda nota justificaba la aplicación de los métodos estadísticos, o, en último caso, acudir al segundo principio de la Termodinámica. Sin embargo, en la física moderna y en las Ciencias del Comportamiento, se presentan cuestiones originadas por complejidades organizadas, es decir, por la interacción de un gran, pero no infinito, número de variables que requieren de nuevos conceptos y métodos.

d/ Es claro entonces que el desarrollo de la Ciencia precisa de nuevos modelos conceptuales que abarquen los problemas específicos que quedan al margen de la Física clásica.

Teniendo presentes estas consideraciones, Bertalanffy, profesor de Biología de la Universidad de Chicago, trató de instrumentar un programa organicista en varios estudios sobre metabolismo, crecimiento y biofísica de los seres vivos, llegando al concepto de los llamados "Sistemas abiertos" para, mediante un proceso de generalización, elaborar una Teoría de la organización de los seres vivos, que denominó "Teoría General de Sistemas", que fué presentada por primera vez en 1937, si bien, debido al escepticismo de la época, su primera publicación con carácter general data de 1950.

Para Bertalanffy, la Teoría de Sistemas se ha visto favorecida por una serie de desarrollos científicos paralelos, especialmente después de la Segunda Guerra Mundial, y de forma especial por el desarrollo de:

a/ La Cibernética, como ciencia basada en el principio del feed-back (retroalimentación) o casualidad circular, que crea

(1) Weaver, Warren- Shannon: The Mathematical Theory of Communication. 1948

mecanismos destinados a la consecución de objetivos y a asegurarse un control óptimo de su propia conducta (self-control).

b/ La Teoría de la Información, que introduce el concepto de información como una magnitud medible, mediante una expresión isomórfica con la entropía negativa de la Física, y que desarrolla los principios de la Comunicación y codificación de la Información, estableciendo una analogía entre el concepto de información y el de energía de la Física.

c/ La Teoría de Juegos, que analiza con una estructura matemática moderna la competencia racional entre dos o más antagonistas, que tratan de maximizar sus ganancias o minimizar sus pérdidas.

d/ La Teoría de la Decisión, que trata de dar normas de conducta óptimas en las organizaciones humanas basadas en el examen de situaciones dadas y de los posibles resultados de las diferentes alternativas.

e/ La Topología, que incluye campos como la Teoría de grafos y la Teoría de redes.

f/ El Análisis del Factor, es decir, el aislamiento mediante el análisis estadístico, de factores en problemas multifactoriales, con objeto de detectar interacciones.

g/ La Teoría General de Sistemas en sentido estricto, que trata de obtener, partiendo de una definición general de sistemas como un todo complejo constituido por interacciones entre sus componentes, conceptos característicos de las organizaciones, tales como interacción, suma, mecanización, centralización, finalidad, etc., para aplicarlos a fenómenos concretos.

A su vez, Bertalanffy (1) distingue los siguientes campos dentro de la Teoría General:

1/ Ingeniería de Sistemas, es decir, planificación científica, diseño, evaluación y construcción de sistemas hombre-máquina.

(1) Bertalanffy, Ludwig: General Systems Theory: A critical Review. 1962.

2/ Investigación Operativa, que comprende en control científico de Sistemas ya en funcionamiento, de hombres, máquinas, dinero, materiales, etc.

3/ Ingeniería humana, que trata de la adaptación de los sistemas, especialmente las máquinas, con objeto de obtener la máxima eficacia con el mínimo coste.

De acuerdo con Gwilyn M. Jenkins (1), la Teoría de Sistemas ha obtenido un extraordinario auge en el estudio de las organizaciones (empresas, Administración, etc.) debido a las siguientes causas:

a/ Las concepciones parciales a los problemas de las organizaciones han sido superadas cuando se trata de lograr la máxima eficacia en su desenvolvimiento, y esto se debe a que las Compañías se han ido haciendo cada vez más complejas, y además las decisiones requieren manejar grandessmas de dinero, por lo que una elección inadecuada supone un coste enorme para la Entidad.

b/ La concepción sistema sustituye la aproximación parcial por aproximaciones totales. El Análisis de Sistemas supone el diseño de sistemas complejos mediante la utilización óptima de recursos (hombres, dinero, máquinas y materiales), de forma que los sistemas que integran la organización como un todo quedan perfectamente engranados, controlados e intstrumentados para lograr así los objetivos del sistema complejo de la manera más eficiente.

c/ El desarrollo moderno de la Teoría de Sistemas en las organizaciones no sólo se debe al incremento de la complejidad de éstas, sino también al creciente potencial de computadores analógicos, digitales o híbridos de gran capacidad, que permiten elaborar un modelo global del sistema a optimizar. ,

d/ La Teoría de Sistemas permite unificar las tareas de dirección, interrelacionando las diversas técnicas que se requieren para la resolución de problemas complejos (económicos, de ingeniería, psicológicos, etc.).

(1) Jenkins, Gwilyn M.: The Systems Approach. 1972.

e/ La Teoría de Sistemas se caracteriza por un enfoque global que sirve para mejorar la toma de decisiones de la empresa, asegurando que los objetivos son correctos, están vinculados a los elementos que los deben motivar y son alcanzados con la máxima eficacia.

f/ Finalmente, esta concepción Sistema requiere su incorporación a todos los niveles, tanto en las unidades económicas como en las administrativas. La palabra "sistema" (etimológicamente "syn", juntos e "histem", agrupar), expresa la existencia de un plan o esquema, de acuerdo con el cual los elementos están interrelacionados formando un todo.

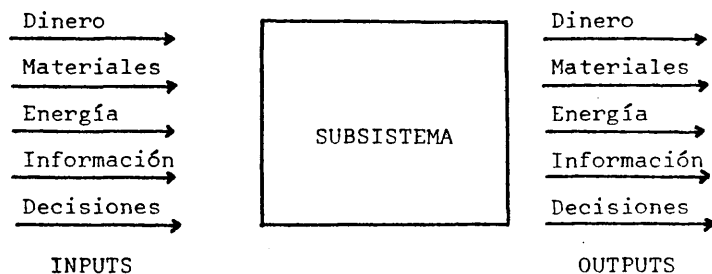
Para Jenkins, las notas que identifican la aproximación por sistema al estadio de las organizaciones son las siguientes:

a/ La primera propiedad de un sistema es que es un conjunto complejo de hombres y máquinas.

b/ La segunda característica estriba en que todo sistema puede ser descompuesto en subsistemas, y éstos a su vez en nuevos subsistemas cada vez más elementales (proceso de análisis). El procedimiento de esta descomposición depende de la naturaleza del sistema en estudio y requiere un análisis a fondo del sistema y de sus interacciones.

c/ En tercer lugar, los subsistemas obtenidos se interrelacionan mutuamente. La actividad de un subsistema dado se interacciona con la de otros subsistemas, y por tanto no puede ser diseñado aisladamente por el analista de sistemas.

En general, un subsistema puede contemplarse como un proceso que transforma ciertas entradas de dinero, materiales, energía, información y decisiones en las correspondientes salidas.



Lógicamente, los outputs de un sistema son inputs de otro, siendo misión del analista de sistemas explicar con detalle la naturaleza de estas interacciones.

d/ Cada sistema forma parte de una jerarquía de sistemas. Una empresa, por ejemplo, debe coordinar e integrar sus funciones de planificación e inversión, investigación, diseño y desarrollo, producción, venta y comercialización; y esto será hecho con mayor eficacia si conoce la industria a que pertenece, la economía nacional e incluso la internacional (sistemas más elevados). Naturalmente que los sistemas más altos jerárquicamente tienen una considerable influencia sobre los sistemas por debajo de ellos jerárquicamente.

e/ En quinto lugar, todo sistema debe tener una serie de objetivos que frecuentemente están en conflicto. Por ejemplo, el objetivo de reducir la probabilidad de ruina del eente asegurador (objetivo de estabilidad) está en conflicto con el objetivo de maximizar los beneficios repartibles, y, por consiguiente, reducir lso fondos destinados a incrementar las reservas de estabilización, o la dialéctica entre el aumento de ventas de los agentes y la selección adecuada de los riesgos. El decisor necesita pues, obtener soluciones de compromiso, de forma tal que el resultado final sea óptimo. Esta integración y jerarquización de los objetivos más generales de la organización como un todo, es básica para la supervivencia y desarrollo del sistema, però su consecución requiere, además de un detenido análisis del sistema y subsistemas, aplicar técnicas de optimización más o menos complejas y en base al sistema de preferencia del decisor. Como ejemplo podemos citar las soluciones obtenidas por Borch (1) y De Finetti (2) acerca de las empresas de seguros cuyos objetivos consisten en maximizar el valor actual esperado de los dividendos, compatibles con el objetivo de asegurar una duración mínima esperada de la Compañía.

(1) Borch, Karl: The Theory of Risk. Royal Statistical Society. London, 1967

(2) Finetti, Bruno De: Su una Imposizione alternativa della Theoria Collectiva del Rischio. XV Congreso Internacional de Actuarios. New York, 1957.

f/ La más importante característica que identifica la concepción sistema es la de que éste debe ser diseñado por el analista de sistemas, de forma que sea capaz de alcanzar los objetivos propuestos. En este proceso intervienen las cuatro fases de dirección por sistema: Planificación, Organización, Control y Comunicación.

Concluimos lo que pudiéramos llamar exposición general de la Teoría de Sistemas. Tal exposición ha tenido por objeto situar los conceptos básicos de dicha Teoría e incardinarla dentro de la Historia de las Ciencias. Si su exposición no ha resultado todo lo diáfana que fuera de desear, quizá se deba al dinamismo de dicha Teoría, en la que los Trabajos se suceden con sucesivas matizaciones de tipo metodológico, lo que impide el necesario proceso de sedimentación de los conceptos.

Procedemos a continuación a repasar brevemente los conceptos fundamentales y a introducir otros nuevos que nos permitan aplicar la Teoría de Sistemas al ámbito Actuarial, en la presentación de la Empresa de Seguros como un sistema complejo, dentro del que aparecerá el subsistema que da enunciado a esta Tesis Doctoral.

METODOLOGIA DE LOS SISTEMAS

Hemos insistido en el hecho de que el término "sistema" es hoy en día uno de los más empleados en la mayoría de las disciplinas científicas (física, química, matemáticas, lógica, cibernética, economía, etc.); sin embargo, el concepto de sistema es utilizado en cada una de ellas de manera diferente, y se aplica para resolver problemas de muy diversa índole. Estas diferencias son principalmente debidas a los métodos y objetivos específicos de cada ciencia.

En las ciencias experimentales, tales como la física, la biología, etc., el sistema representa una abstracción que se debe usar cuando la realidad se examina desde el punto de vista de una disciplina particular. Cuando investigamos acerca de la realidad, fijamos nuestra atención en alguna parte que nos interesa especial-

mente en un momento dado. Esta parte de la realidad se llama objeto, mientras que al resto lo denominamos ambiente. Es fácilmente comprensible que los límites entre ambos conceptos no estén claramente diferenciados.

Por otra parte, no siempre podemos estudiar objetos en toda su complejidad. Sobre determinados objetos se puede observar o medir los resultados de ciertos atributos, o, dicho de otra forma, se pueden observar valores de ciertas variables. La elección de las observaciones depende de lo que se considere de interés del objeto, o de lo que esté de acuerdo con una idea dada. Las variables escogidas son todas de la misma naturaleza científica, o bien si aplicamos un análisis interdisciplinar, pueden pertenecer a distintas ramas de la Ciencia.

En principio, siguiendo a Klir (1), se pueden distinguir las siguientes clases de variables:

Externa: Toda variable observada desde fuera del sistema.

Interna: Variable que pertenece al sistema, pero no es observable desde fuera del mismo.

Input: Cada variable que surge del entorno o ambiente y ejerce influencia sobre el sistema.

Output: Cada variable que surge del sistema y actúa sobre el ambiente.

Feedback: Cuando surge del sistema y actúa sobre el mismo, pero no pertenece al ambiente o entorno.

Perturbaciones: Conjunto de variables de entrada que, incidiendo sobre el sistema lo hacen de forma incontrolada.

Variables de estado: (algunas de las cuales pueden ser también de salida): es el conjunto mínimo de variables del sistema tal que, conocido su valor en un instante dado, nos permite conocer la respuesta del sistema ante cualquier señal de entrada o de perturbación.

(1) Klir, G.J.: General Systems Theory. 1969.

Naturalmente, toda variable observada debe estar vinculada a un espacio dado, de forma que si la posición es un factor relevante, debe ser considerada como una nueva variable. Por ejemplo, la velocidad o la aceleración de un cuerpo depende de la posición del mismo en el espacio. Esta posición que debemos especificar no es absoluta en el universo, sino la posición relativa respecto a las posiciones de otras variables observadas.

Además de la característica especial (la situación en el espacio), se debe especificar la situación temporal, esto es, el conjunto de las observaciones o medidas. Este tiempo de referencia o instante en que se inicia la observación del objeto suele ser considerado como $t = 0$. Del mismo modo que la dimensión espacial, la temporal, puede ser algunas veces, irrelevante respecto a los propósitos del observador. Podemos denominar ambas condiciones como la "especificación espacio-tiempo".

Tan pronto como se hayan determinado las variables que deben ser observadas, y se haya definido un espaciotiempo correspondiente, hay que decidir sobre la exactitud y la frecuencia de dicha observación. Esta fase del análisis se conoce con el nombre de "nivel de resolución espaciotiempo", de forma que cuanto mayor sea la precisión y/o la frecuencia de las observaciones, mayor será el nivel citado, y viceversa. A veces no es posible alcanzar el nivel deseado debido a la imperfección de los aparatos de medida en su sentido más general (físicos, económicos, etc.), en otros casos se escoge intencionadamente un nivel de resolución más bajo que el que podríamos obtener, es decir, se prescinde voluntariamente de algunos datos. Tal sucede siempre que no se consideren las fluctuaciones aleatorias.

Como regla general, se puede afirmar que los datos no se obtienen en forma de hacer uso directo de los mismos. Es preciso su conversión, de forma tal que las relaciones invariantes en el tiempo entre las variables observadas, se expresen de manera adecuada al propósito del estudio.

En el estudio de los Sistemas Dinámicos. las variables son función del tiempo, existiendo unas relaciones funcionales o de otra índole entre las variables de estado y las de entrada al Sistema, así como entre las de salida y las de entrada del Sistema.

Como dice Jesús Vegas Asensio en su trabajo "La empresa aseguradora como servosistema"(1), y, más recientemente, en su trabajo "Un ensayo sobre la concepción sistema aplicada a la empresa de seguros" (2), la teoría clásica hace especial referencia a la relación existente entre todas las variables de salida y las variables de entrada; sin embargo, la teoría moderna hace especial hincapié en las relaciones existentes entre las variables de estado y las variables de entrada, aproximándose a la concepción cibernética. Al tener en cuenta el tiempo interno, aparecen flujos materiales energéticos o de información. Con ello, variables que en la consideración estática del sistema son datos, ahora son variables de decisión para conseguir objetivos a largo plazo del decisor.

La teoría clásica de los sistemas dinámicos centra su interés en la posible relación funcional existente entre las variables de entrada $u(t)$ y las correspondientes señales de salida $y(t)$. Si podemos expresar la citada relación por medio de una ecuación diferencial lineal de orden n de coeficientes constantes, podemos escribir

$$Y(S)(S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \dots) - (0^+) = U(S)(b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_n)$$

siendo (0^+) un término que es función de las condiciones iniciales de la señal de salida y que en la teoría clásica sería nulo. Despejando $Y(S)$ obtendremos:

$$Y(S) = \frac{b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \dots + a_n} U(S) + \frac{(0^+)}{S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_n}$$

Por tanto, si conociéramos la transformada señal de entrada al sistema $U(t) \rightarrow U(S)$, podríamos obtener la transformada señal de salida $Y(S)$ con sólo conocer $G(S)$ y el término de condiciones iniciales que son función de la ecuación diferencial.

En el estudio clásico, se supone que todas las condiciones iniciales son nulas, para obtener la respuesta forzada del sistema o, lo que es lo mismo, suponen que el sistema parte del reposo. En estas condiciones, conociendo $U(S)$ y el factor $G(S)$, que es el fiel reflejo de la ecuación diferencial, podemos calcular $Y(S)$; por lo

tanto, $G(S)$ es la relación funcional que caracteriza al sistema en el dominio de la variable S .

Por lo tanto, en lugar de resolver la ecuación diferencial en el dominio del tiempo, pasamos al campo complejo, donde caracterizamos al sistema por una función algebraica que llamaremos función de Transferencia. Por el contrario, la Teoría Moderna pone su acento en la relación existente en lugar de entre las señales de entrada y salida del sistema (función de transferencia), entre el estado del sistema y las perturbaciones o señales de entrada.

El concepto de función de transferencia es de una gran importancia en la Teoría de Sistemas. Profundicemos en el mismo a través del proceso de consideración de la empresa como sistema de información-decisión. En el sistema de información-decisión, los centros de decisión deben recibir:

1/ La cantidad de información adecuada. Tan pernicioso es un defecto en los flujos de información como un exceso que no permite ser asimilado a tiempo.

2/ La clase de información que realmente necesiten, y

3/ La información recibida debe llegar en el tiempo preciso para la oportuna toma de decisiones óptimas.

El esquema es el siguiente:

Información del
sistema (interna)

Función de
Transferencia

Decisiones

Información del
ambiente (externa)

Realimentación

Bajo esta concepción, vemos cómo los outputs del sistema en un momento dado podrían ser inputs en el momento siguiente (feed-back o retroalimentación); es decir, las decisiones que se tomen influirán sobre el ambiente y sus respuestas condicionarán

las futuras acciones del decisor. Al llegar a este punto, es preciso señalar que la teoría de sistemas no es nueva, sino que gran parte de ella se ha venido aplicando durante varios años en las ciencias naturales, especialmente en la física aplicada, dando origen a los "Sistemas de Ingeniería". Sin embargo, existe una diferencia fundamental entre los sistemas físicos y los sistemas en la empresa, y ésta diferencia radica fundamentalmente en el significado que ambos conceptos asignan al término "función de transferencia".

Para la teoría clásica de los sistemas físicos, la función de transferencia expresa la relación funcional existente entre las entradas y salidas de los diversos componentes del sistema. Sin embargo, los sistemas económicos, por su carácter cibernético, no pueden ser modelizados por ecuaciones diferenciales identificadas, por lo que el término de función de transferencia tiene un significado diferente. Para nosotros expresa todo proceso de decisión, matemático o no, en un sistema de control. Posteriormente estableceremos, de manera breve, lo que se entiende por un sistema de control.

Este proceso consta de los siguientes elementos:

Entrada: Información disponible'

Salida: Decisión óptima.

Función de transferencia: el proceso mediante el cual la información se convierte en decisión.

A su vez, la salida puede ser entrada de otro proceso de decisión y así sucesivamente. De esta forma, la función de transferencia puede consistir en una expresión matemático-actuarial, en un modelo de programación, en un proceso de análisis estadístico y biométrico, en una regla de decisión, en técnicas de simulación, en juicios humanos subjetivos, etc. También se nos puede plantear el problema de seleccionar la función de transferencia apropiada de entre varias posibles. En realidad, la elección entra en el contexto de una función de transferencia a nivel superior, esto es, debemos "decidir cómo decidir". A esta clase de decisiones se las denomina decisiones estructurales, ya que indentifican el conjunto de procesos de decisión posibles en el sistema.

SISTEMAS DE CONTROL. SERVOSISTEMAS

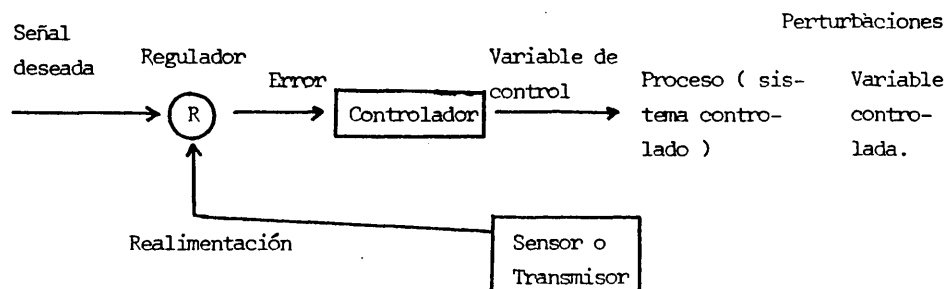
Una característica esencial de los sistemas es que su diseño refleja el esfuerzo de controlar las interrelaciones de las distintas variables que los componen, con el fin de regular el resultado final o las variables esenciales del sistema. El control requiere:

a/ Un conjunto de elementos fundamentales u objeto de control que constituye el proceso. Se pretende que la señal de salida que será normalmente la controlada, tome unos determinados valores (sistemas de control) o bien siga la señal de entrada (servosistema).

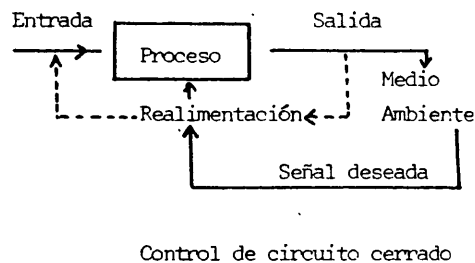
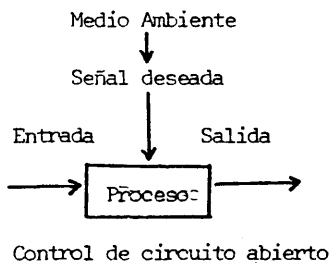
b/ Un sensor o dispositivo de medida del output o salida del proceso del sistema.

c/ Un dispositivo regulador que compare la salida obtenida del sensor con el nivel deseado de la misma.

d/ Finalmente, un dispositivo controlador que genere una señal correctora o variable del control, que, actuando sobre el proceso del sistema, consiga reducir la diferencia entre la señal de la salida lograda y deseada al mínimo posible.

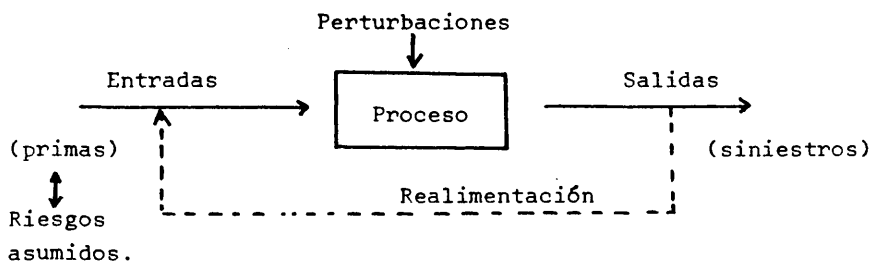


Un sistema puede diseñarse como de "control de circuito abierto" o de "control de circuito cerrado". Los esquemas serían los siguientes:



La diferencia estriba en que en el control de circuito cerrado, los cuatro elementos de control pertenecen al mismo sistema, con lo que se efectúa un control mucho más riguroso. Una parte esencial de los sistemas de circuito cerrado es la realimentación, es decir, la salida del sistema es medida continuamente en términos de elemento controlado, y la entrada es modificada adecuadamente para reducir el error o divergencia del sistema al mínimo posible.

En el ámbito actuarial, podemos encontrar interesantes aplicaciones de los sistemas de control. En efecto, consideremos el esquema input-output más sencillo de un asegurador directo:



El circuito de realimentación expresa el hecho de que los siniestros ocurridos estimulan la necesidad de buscar en el seguro la correspondiente cobertura de riesgos, con la consiguiente entrada de flujos de primas en el asegurador directo.

A través de un esquema de este tipo, y mediante la técnica de los sistemas de control, analiza Jesús Vegas Asensio, en el trabajo últimamente reseñado, cómo el reaseguro de riesgos o reaseguro proporcional constituyen un mecanismo de control de circuito

abierto, en tanto que el reaseguro de siniestros constituye un mecanismo de control de circuito cerrado, con lo que la modalidad de reaseguro más adecuada, desde el punto de vista del cedente, es el reaseguro de siniestros (no proporcional), si bien en este caso el reasegurador asume el "peso" del control efectivo del sistema, para lo que exigiría normalmente un precio mucho más alto del que demandaría en el supuesto de un control por circuito abierto (como sería la modalidad de cuota-parte).

En lo que, al objeto de nuestra Tesis Doctoral, resulta de mayor interés, es importante reseñar que las operaciones de tarificación constituyen otro ejemplo de sistema de control en la empresa de Seguros. En efecto, siendo la variable controlada la siniestralidad real de cada póliza asegurada en relación con la prima que paga, la tarificación a priori o "class rating" es, en realidad, un sistema de control por circuito abierto, mientras que la tarificación a posteriori, por ejemplo, el método del bonus-malus, constituye un mecanismo de circuito cerrado, ya que la prima para cada periodo se va determinando, en este caso, en función de la siniestralidad tenida en los periodos anteriores.

ESTRUCTURA DEL SISTEMA ACTUARIAL

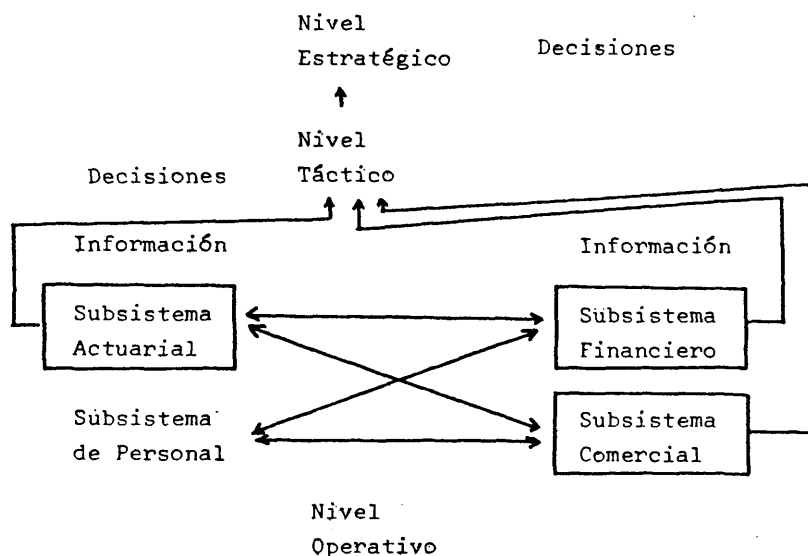
Los sistemas actuariales de decisión son aquéllos que consideran a la empresa de Seguros como el objeto del sistema, y, por tanto, tratan los componentes económico actuariales del ente asegurador, integrándolos en un todo unitario, con la finalidad de conseguir un marco apropiado para la toma de decisiones racionales.

Esta idea no es nueva en la Ciencia Actuarial; siempre que un autor ha pretendido abordar un problema complejo con criterio operativo, ha tenido presente la idea de Sistema. Sin embargo, cuando se estudia aisladamente una componente cualquiera (primas, reservas, reaseguro, etc.) prescindiendo de las demás y del ambiente en que se toma la decisión, ésta no constituirá una decisión dentro de un sistema.

Recientemente, han surgido autores que abordan el estudio de las decisiones en el Seguro bajo la concepción sistema, entre

los que cabe destacar a Pfeffer y Klock (1), por una parte y a Bohman (2) por otra.

Nosotros, siguiendo a Jesús Vegas Asensio, en su trabajo "Un ensayo sobre la concepción sistema aplicada a la empresa de seguros" (1980), al que anteriormente nos hemos referido, vamos a distinguir en la empresa de seguros tres niveles de sistemas: estratégico, táctico y operativo, tal y como se relacionan en el grafo siguiente:



a/ El nivel estratégico genera las políticas, programas y procedimientos que determinan la forma y el grado de interacción entre los otros dos niveles y el ambiente del sistema, así como sirve de lazo de conexión entre la empresa y su ambiente. Corresponde esencialmente a la función de establecimiento de planes y objetivos a largo plazo.

(1) Pfeffer, I.- Klock, D.: Perspectives on Insurance. 1974.

(2) Bohman, Harald: Insurances businessss describes by a Mathematical Model. Skand. Aktuar. 1973.

b/ El nivel táctico corresponde a la elaboración de planes a medio y corto plazo, así como a la función de "organización" en la empresa, en aras a conseguir los objetivos impuestos por el nivel estratégico. Sirve como canal de transmisión y filtrado de información entre los otros dos niveles.

c/ Finalmente, el nivel operativo es el que ejecuta los planes y utiliza los recursos de que dispone la empresa con propósitos óptimos.

? En general, podemos afirmar que cada subsistema que integra el Nivel Operativo se caracteriza por el siguiente análisis input-output:

Subsistema Comercial:

Entradas:

a/ Del ambiente: Clientes potenciales, productos y tarifas de la competencia, estructura del mercado, nivel de ventas e impacto de los productos de la empresa, política de la Administración (comisiones máximas legales a los agentes, etc.), conservación y caída de la Cartera, condiciones económicas generales.

b/ Del sistema: Capacidad de elaboración de nuevos productos, capacidad de ventas (personal vendedor), recursos financieros, política comercial establecida por la gerencia.

Salidas:

Al subsistema Actuarial, sobre requerimientos técnicos; al subsistema Financiero, sobre ingresos por ventas de productos (primas) e información para la elaboración del presupuesto; al subsistema de Personal, sobre requerimientos del mismo; al ambiente (venta de seguros y publicidad).

Subsistema de personal:

Entradas:

Del ambiente: Política laboral, situación económico-laboral, actividad de la competencia.

Salidas:

Personal especializado en las funciones de los restantes subsistemas operativos (actuarial, comercial y financiero) o per-

sonal directivo o perteneciente al Departamento de Proceso de Datos; nóminas de personal (subsistema financiero); análisis de los costes de administración y de producción, cobro y cartera (subsistema Actuarial).

Subsistema Financiero:

Entradas:

Ingresos monetarios en concepto de primas, de comisiones y participación en beneficios del Reaseguro cedido, de intereses de préstamos, de la cartera de valores, etc.

Salidas:

Egresos monetarios en concepto de pagos por siniestros, sueldos y salarios, primas de reaseguro cedido, reparto de beneficios a los asegurados, dividendos, intereses de los depósitos de los Reaseguradores, exacciones e impuestos, etc.

Subsistema Actuarial:

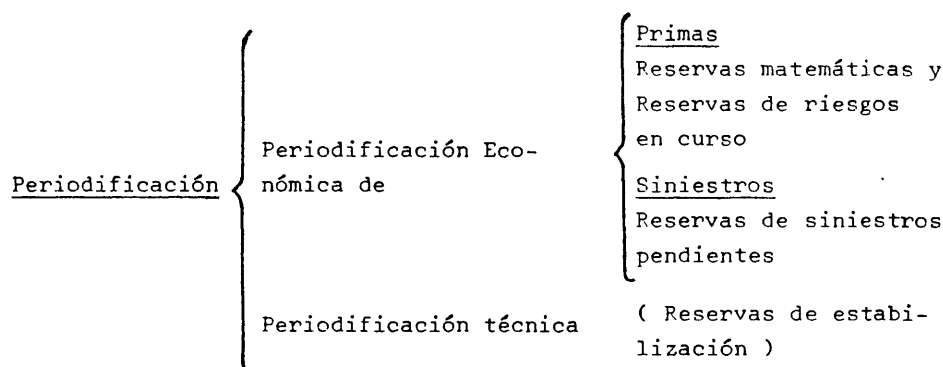
En cuanto al subsistema Actuarial, un análisis más detallado del mismo nos permite identificar los siguientes elementos:

	Interna, de la empresa
Entradas de información	Económica, del subsistema comercial
	Técnica.

La información técnica consiste en información sobre distribuciones básicas (del número de siniestros y de la cuantía de cada siniestro), Tablas de Mortalidad, factores de riesgo, función de producción del servicio de seguridad.

Las funciones del Subsistema Actuarial afectan principalmente a las siguientes áreas:

<u>Tarificación</u>	{	Bases técnicas	{	Distribuciones básicas
				Tablas de Mortalidad
				Tipos técnicos de interés
		Cálculo de primas	{	Prima de riesgo
				Recargos de Seguridad
				Recargos de gestión
				Márgenes de beneficios
		Selección de Riesgos y tratamiento de los riesgos asegurados.		



Estabilidad:

Estableciendo modelos matemáticos que permitan asignar los valores óptimos a las variables de decisión: recargo de seguridad (), modalidades y planos de reaseguro (M) y Reservas de Estabilización (S). Las Teorías del Riesgo (Individual, Colectivo y Moderno) constituyen un adecuado instrumento para conseguir la estabilidad adecuada del ente asegurador.

<u>Variables esenciales</u>	{	Indice de estabilidad o probabilidad de ruina de la empresa (E)
	{	Beneficio y dividendos repartibles.

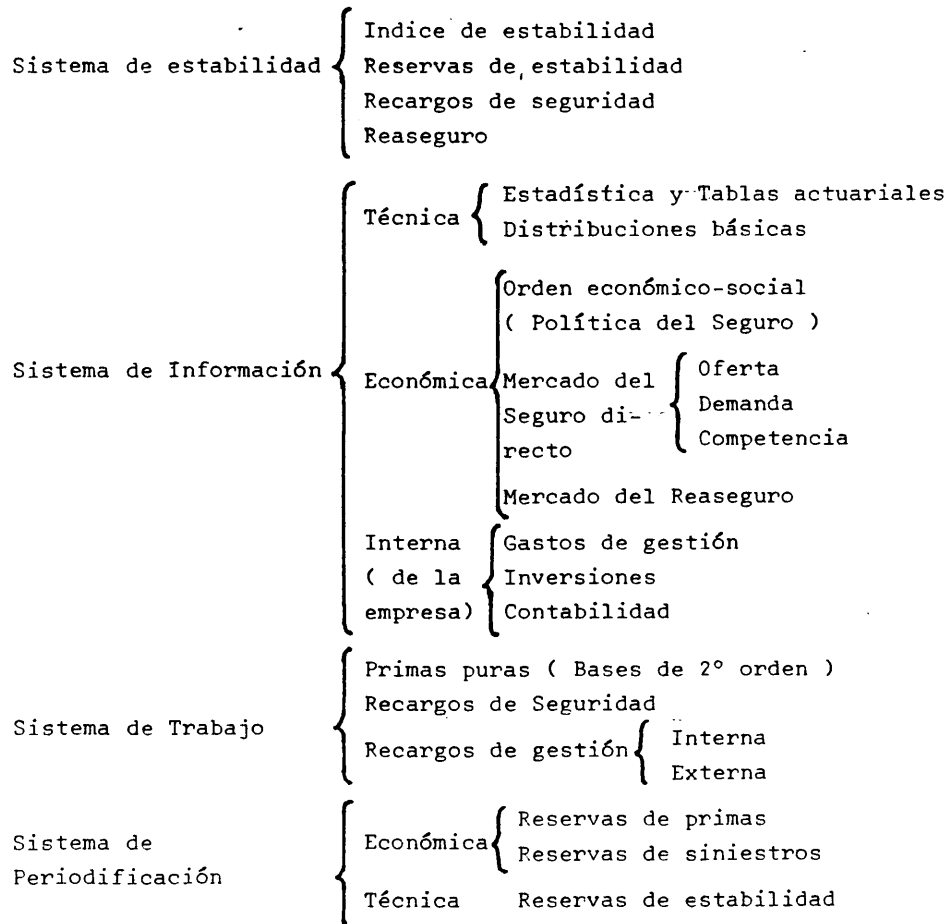
Inversiones:

(conjuntamente con el subsistema de Inversión) dando entrada a criterios de liquidez, solvencia y rentabilidad.

El Sistema complejo que acabamos de elaborar y analizar es sumamente expresivo y comprensivo de la estructura de una empresa de Seguros. El grado nos indica las interconexiones entre los distintos niveles y subsistemas, conexiones que se han desarrollado literariamente en los anteriores esquemas. Tenemos, en definitiva, una descripción completa, una "radiografía" especial de una entidad aseguradora. Un trabajo verdaderamente premonitorio y pionero en todas estas cuestiones es el de Ubaldo Nieto de Alba, titulado "Concepción Cibernética en la Dirección Actuarial de la Empresa de Seguros", trabajo al que nos hemos referido con mucha reiteración en esta parte de nuestro Trabajo debido al transcendental carácter del mismo. Al hablar de la Estructura de la "Caja Negra del Actuario"

(pag. 39), dice el profesor Nieto de Alba que "se trata de especificar los mecanismos internos que constituyen el gran Sistema Económico- Actuarial T. En un primer paso, hay que poner de manifiesto las conexiones entre los distintos Sistemas, Subsistemas y elementos que integran dicho Sistema T. Ello equivale a poner de manifiesto la estructura económico-actuarial básica de la empresa de seguros en relación con el ambiente en que desarrolla su actividad. Con esta descripción cualificativa de los mecanismos económico-actuariales, estaremos ante un sistema estático, que, por tanto, solamente será útil para decisiones a corto plazo".

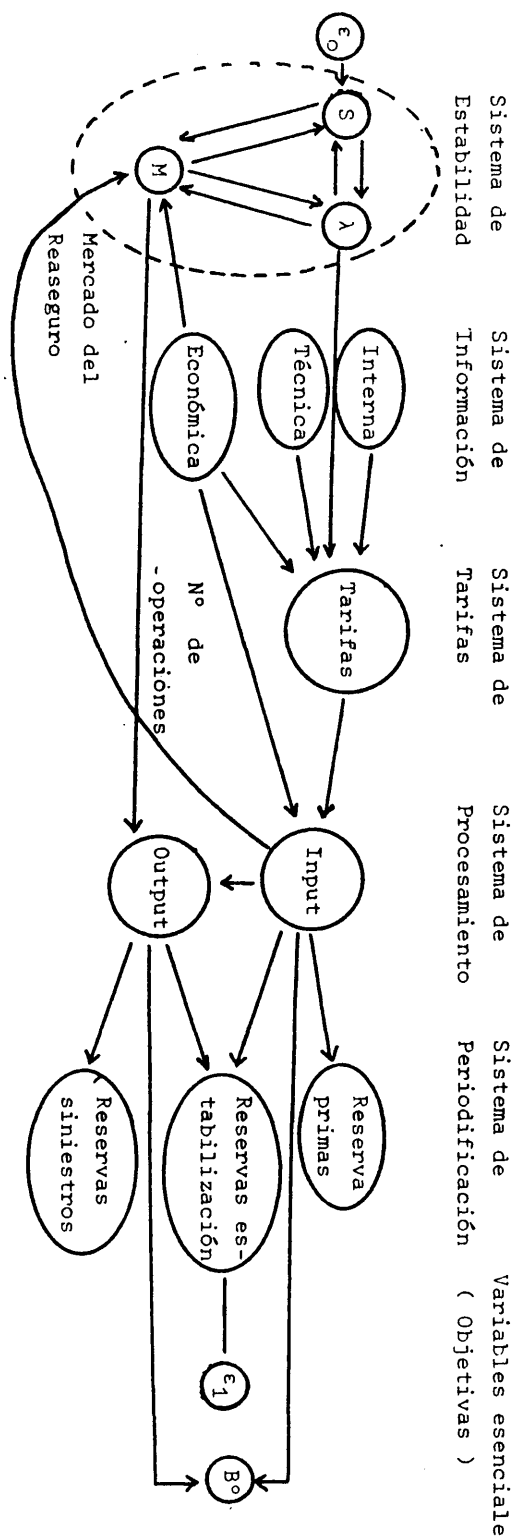
Podemos considerar los siguientes Sistemas básicos:



Sistema de procesamiento { Input (primas)
 Output (siniestros)
 Input-output del Reaseguro.

Todos estos sistemas se encuentran relacionados a través del grafo de la página 53.

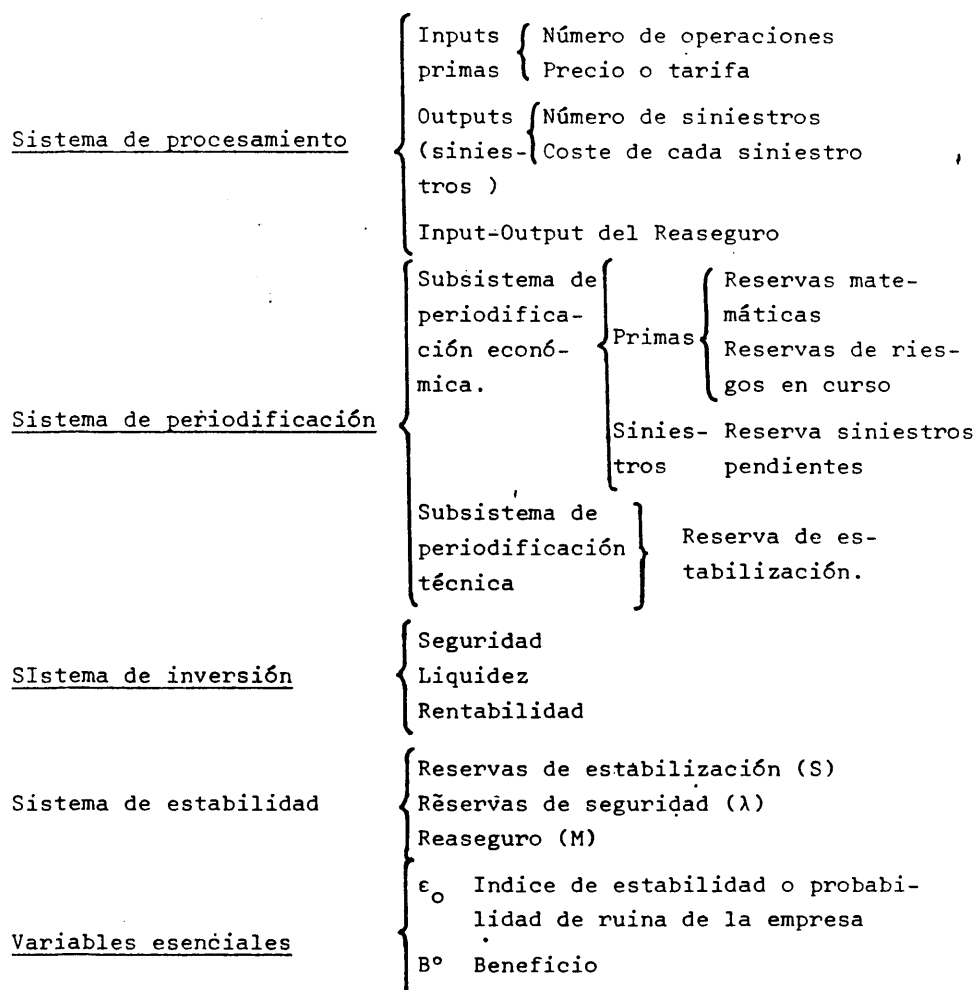
En el sistema cuyo grafo viene recogido en la página 53, se parte de un índice de estabilidad, ϵ_0 , a partir del cual se presenta el subsistema de estabilidad, en el que se recogen las tres variables básicas de estabilidad: Reservas de Estabilidad (S), recargo de seguridad (λ) o reaseguro (M). Las flechas vienen a indicar que se puede ir de una variable a otra, dado su carácter alternativo. El problema es ver cómo se pueden romper esos circuitos fuertemente conexos. A continuación se nos presenta el subsistema de información. ¿De dónde procede la información?. Interna. (de la Empresa), a través de los gastos de gestión interna, información de la organización de la empresa, etc. Técnica, que son las de las distribuciones básicas, tablas actuariales, etc. Por último, económica, proveniente del mercado. Sobre la base de la información, junto con el recargo de seguridad se elaboran las tarifas. Las tarifas, que son el precio por unidad, junto con el número de operaciones, nos dan los inputs, que son todos los ingresos. De ellos salen los outputs, que son todas las indemnizaciones por siniestros, y lo que no se paga por siniestros (parte devengada y no pagada) va a reservas. Los inputs que no son imputables al ejercicio en vigor pasan a constituirse en reservas de primas. A su vez, parte de los outputs se constituyen en reservas de siniestros pendientes de liquidación o de pago. Parte de la diferencia entre inputs y outputs pasa a constituirse en reservas de estabilidad, que incrementan directamente el índice de estabilidad de la Empresa. El Beneficio (B°) se forma por diferencia entre los ingresos y los gastos, una vez que se han constituido no solamente las reservas que tienen su origen en los ingresos y en los pagos, sino también las reservas de estabilidad. Se empieza con un índice de estabilidad ϵ_0 y se termina con otro índice de estabilidad, ϵ_1 , apareciendo el beneficio repartible condicionado a ellos.



Este mismo tipo de sistema general para la empresa lo ha planteado Jesús Vegas Asensio, con posterioridad, en su trabajo "La empresa aseguradora como servosistema" (pag. 18), introduciendo entre los subsistemas de la empresa el de Inversión, a través del grafo presentado en la página 56.

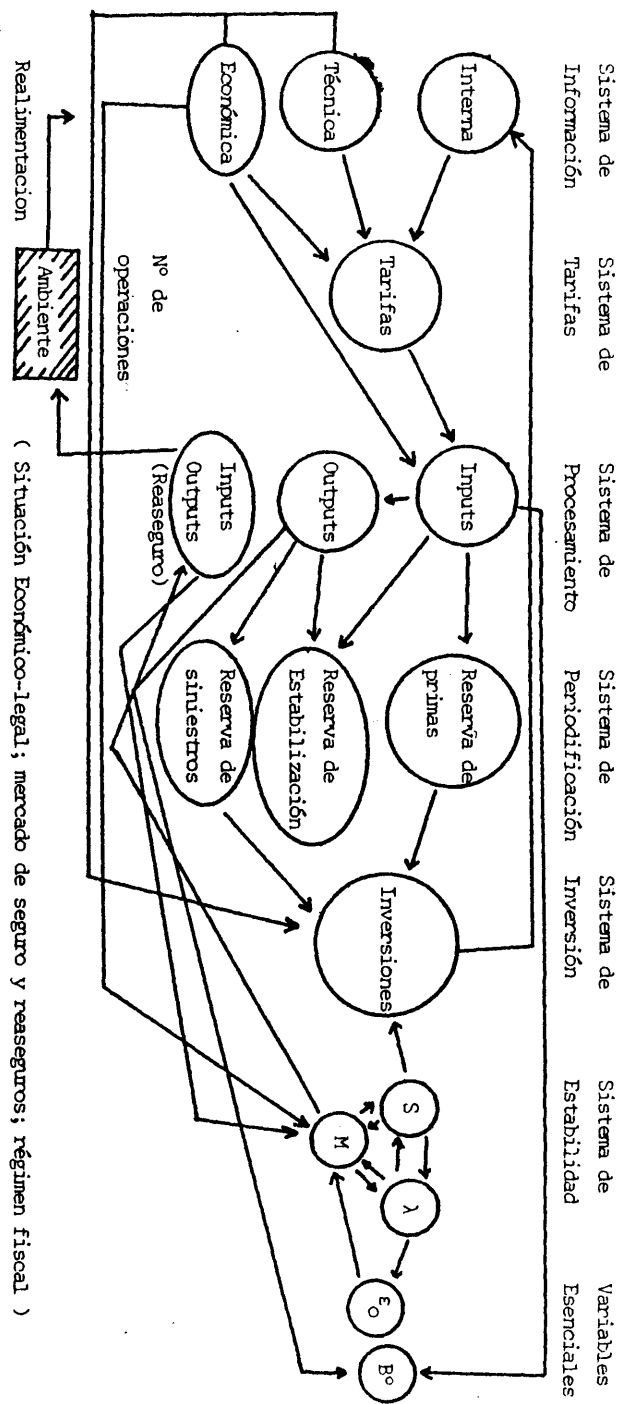
Los elementos característicos del citado Sistema son los siguiente:

<u>Subsistema de información interna de la empresa</u>	<ul style="list-style-type: none"> Gastos de gestión interna. Gastos de gestión externa (producción cobro y cartera). Rentabilidad de las inversiones. Información proporcionada por la Contabilidad (amortización, ratios, etc
<u>Subsistema de información técnica</u>	<ul style="list-style-type: none"> Distribuciones básicas (del número d siniestros y de la cuantía de cada siniestro). Tablas actuariales. Selección estadística del riesgo. Función de producción del servicio de seguridad.
<u>Subsistema de información económica</u>	<ul style="list-style-type: none"> Situación económico-legal (política de Seguros, mercado de capitales, régimen fiscal, etc.) <ul style="list-style-type: none"> Mercado de Seguros <ul style="list-style-type: none"> Oferta Demanda Competencia Mercado de Reaseguros.
<u>Sistema de tarifas</u>	<ul style="list-style-type: none"> <ul style="list-style-type: none"> Subsistema de bases técnicas <ul style="list-style-type: none"> Distribuciones básica Tablas Actuariales Tipos técnicos de int Subsistema de cálculo de primas. <ul style="list-style-type: none"> Prima pura Recargo de seguridad Recargos comerciales Márgenes de beneficio



Nos interesa señalar que, considerando como objetivo supremo la obtención del máximo de beneficio, condicionado a un nivel de seguridad ϵ_0 , prefijado de antemano, en el grafo se presenta una preordenación de acuerdo con el sentido de las flechas que indican los flujos actuarialesm económicos o de información.

Para su ordenación es preciso considerar el grafo reducido, es decir, sin circuitos. Para ello se considera como vértice la componente fuertemente conexa que forman los vértices del sistema de seguridad.



No obstante, este criterio puede ser roto con criterio económico. En efecto, dado ϵ , la primera decisión que sigue recae sobre S (reserva de estabilización), magnitud de estructura que, en las decisiones a corto plazo, al estar fijada, el decisor sólo podrá actuar sobre los dos restantes componentes del sistema de estabilidad.

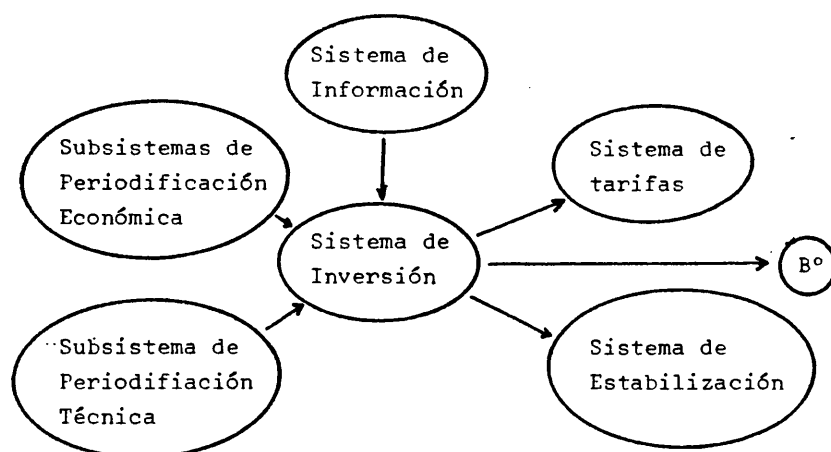
Pero si la empresa opera en países como el nuestro, donde existe una póliza de tarifas uniformes con márgenes de seguridad implícitos (primas calculadas en bases de primer orden), entonces λ viene dado y sólo queda como variable de decisión (a corto plazo) M (volumen de reaseguro) el cual, a su vez, estará condicionado por el propio mercado de reaseguro y por la política llevada a cabo anteriormente por la empresa en este aspecto (firma de tratados de reaseguro, etc.).

El esquema sería entonces el siguiente:



Los tres últimos elementos, S, λ y M, constituyen los tres factores de producción del servicio de seguridad del ente asegurador. Esto nos sirve de ejemplo para comprobar que el grafo que acabamos de expresar no es el único, ni mucho menos, ya que de acuerdo a cómo vengan los flujos de información, se pueden dar sistemas más complejos. Al análisis de todas estas cuestiones dedicaremos el apartado final del epígrafe III de este Trabajo, en el que se analizan distintos grafos, según vengan dados los flujos de información.

Como grafo para analizar el Sistema de Inversión y su relación con los restantes subsistemas y sistemas de la empresa aseguradora, presentamos el siguiente, debido a Nieto de Alba, en su trabajo "Concepción Cibernética...." (Pag. 43)



Como dice Nieto de Alba, "en los últimos años se ha ido dando cada vez más importancia a la concepción de la empresa de Seguros como un sistema total. Ello ha dado lugar a que se fueran relacionando los problemas actuariales del cálculo de reservas con los problemas económicos de la inversión de las mismas. Cuando los criterios de inversión estaban presididos por criterios económicos elementales, en que no se relacionaban con la naturaleza de cada reserva ni con el resto de los sistemas actuariales y de información de la empresa, resultaba que las técnicas matemáticas para su tratamiento también eran elementales. Entendemos que se impone la concepción de un Sistema de Inversión enmarcado dentro del conjunto de los sistemas actuariales de la empresa (estabilidad, tarifas, periodificación e información)".

Analicemos el grafo que se ha presentado. Las decisiones que se tomen en el Sistema de Inversión dependen del Sistema de periodificación (naturaleza de cada reserva) y del Sistema de información (mercado de capitales, política de inversiones, etc.) La influencia del Sistema de inversiones sobre el Sistema de Tarifas se fundamenta en hecho de que los cambios de interés de las inversiones determinan cambios de primas, a través del tipo de interés técnico. Ello depende de cómo venga dada la información respecto a la legislación en materia de inversiones. En este sentido,

Edey (1) dice que los "cambios en el tipo de interés determinan cambios en los tipos de primas". Naturalmente que esta influencia será de mayor importancia en los seguros de vida.

Por otra parte, este Sistema de Inversión influye en las decisiones que se tomen en el Sistema de estabilidad. Para poner de manifiesto esta última relación, nada mejor que acudir a una cita de Borch (2), cuando dice "El Actuario ha discutido, durante generaciones, los problemas de reaseguro, frecuentemente con el propósito explícito de reducir las fluctuaciones de la Compañía, pero sólo de una manera ocasional ha indicado que esas fluctuaciones puedan ser eliminadas, mitizadas o acentuadas por las fluctuaciones en los resultados de las inversiones de la Compañía". Este tema de la solvencia de la Entidad aseguradora, en relación con la rentabilidad de las inversiones ha sido objeto de múltiples estudios, como los de Coppini, Hall, Mody, etc.

Hemos concluido nuestro análisis de la Teoría General de Sistemas y de la Concepción Sistema. En él, se ha procurado trabajar a dos niveles: general y concreto. Se ha pretendido, en primer lugar, dar una somera idea sobre el desarrollo teórico de la Teoría de Sistemas, desde sus conceptos fundamentales hasta sus aplicaciones, de carácter general, a la Ciencia como método. No se ha concretado, a ese nivel, ningún campo científico, como no haya sido por vía de ejemplo. Posteriormente, se ha hablado del Enfoque Sistemico aplicado a la Ciencia Actuarial, con los distintos Sistemas, Subsistemas y Elementos que componen el objeto de la misma: la Empresa de Seguros. Ya se dijo en su momento que la Matemática Actuarial con concepción interdisciplinar era la "ciencia que tiene

(1) Edey, J.: The relationship between assets and liabilities where benefits are subject to option. Memorias del 18º Congreso Internacional de Actuarios. Munich, Junio, 1968. Vol. II. Pag. 49-54

(2) Borch, Karl: The optimal portfolio of asset in an insurance company. Memorias del 18º Congreso Internacional de Actuarios. Munich, Junio, 1968. Vol. III. pag. 21-32.

por objeto el estudio cuantitativo de las operaciones de Seguro, en cuanto que tales operaciones se lleven a cabo por un ente (empresa) que desarrolla su actividad dentro de un marco económico-social.

Establecido el sistema complejo que es la Empresa de Seguros, dedicaremos en lo que sigue nuestros afanes al estudio del Subsistema de Información Técnica, que, junto con el recargo de seguridad (Subsistema de Estabilidad) y los Subsistemas de Información Interna y Económica, nos definirán el precio del Riesgo, que es la Tarifa o Prima de Seguro.

Nuestro estudio, por tanto, comenzará con el análisis del Coste Estadístico (Capítulo II de esta Tesis), que se basa en las distribuciones básicas y la del daño total), como distribución del Proceso de Riesgo. Esta última distribución nos permitirá, mediante el principio de equivalencia, establecer la llamada Prima Pura o de Riesgo, en cuya elaboración interviene únicamente el Subsistema de Información Técnica. La incorporación a dicha prima del recargo de seguridad (perteneciente al Subsistema de Estabilidad) nos definirá la llamada Prima Recargada, $P_r = P(1+\lambda)$. A ella se incorporarán los recargos de gestión pertinentes (Subsistemas de Información Interna y Económica) y se obtendrá la Prima de Tarifa (Capítulo III), en cuya elaboración intervendrá la política de tarifas de la entidad, que dependerá de su dimensión, del entorno en sus distintas vertientes (mercado, entorno legal, etc.), con lo que se completarán los objetivos de análisis del presente Trabajo.

La aplicación de la Teoría de Sistemas al campo Actuarial es amplísima, y nuestra única pretensión será ver cómo dicha Ciencia permite el planteamiento, con mucha mejor adecuación a la realidad, de los problemas del precio del seguro, desde el punto de vista del entorno como elemento básico en la actividad económica de la Empresa de Seguros. Nuestro estudio será un breve apunte sobre algo cuyas posibilidades de desarrollo no son, a priori, mensurables.

Iniciemos el análisis del Coste Estadístico del Riesgo.

61

II

EL COSTE ESTADISTICO

II. 1.- EL PROCESO GENERAL DE RIESGO

Nos proponemos modelizar el coste estadístico del riesgo, en el caso de los llamados seguros generales o no vida. La estructura estocástica de este tipo de seguros es diferente a la de los seguros de vida, por varias razones fundamentales, que podemos resumir en las siguientes:

a/ A diferencia de los seguros de vida, las primas sirven únicamente para la liquidación de los siniestros y no para la acumulación de un capital abonado. Estas primas no admiten la descomposición en parte de riesgo y parte de ahorro característica de los seguros de vida a prima media. Se las suele denominar por ello: "Primas netas de riesgo:."

b/ En los seguros generales se trata de operaciones a corto plazo. Por ello, no juega un papel relevante en modo alguno el tipo de interés, debido como decimos al corto período de tiempo que media entre el pago de la prima y el de la indemnización (generalmente días o meses), caso de que ésta se produzca.

c/ en las bases técnicas de los seguros no vida juegan relevante papel los siguientes principios:

1) Las probabilidades de los sucesos, (incendio, accidente, etc.) no dependen de una sola característica o variable única, como ocurre en el caso de los seguros de vida. El problema de la homogeneización de los riesgos adquiere, así, por tanto, una mayor relevancia.

2) En los seguros generales, el acaecimiento de un siniestro puede dar lugar a consecuencias económicas de distinta cuantía. Resulta así que la cuantía de la indemnización total o porcentual es una variable aleatoria.

3) No existe acumulación de reservas, ni juega su papel el tipo de interés técnico, como en los seguros de vida.

4) Respecto a la estabilidad, se presenta el problema de que las desviaciones aleatorias debidas a siniestros extraordinarios, en comparación con las primas, son de una mayor importancia

que en los seguros de vida. De aquí que se exija la asunción de especiales medidas para mantener la estabilidad de las entidades.

Por todo ello, resulta obvia la anterior afirmación de que es sustancialmente diferente la estructura estocástica de los seguros generales con respecto a los seguros de vida. Esta diferenciación da lugar a teorías matemáticas distintas.

Pues bien, como decíamos al principio, nos proponemos modelizar el coste estadístico de los riesgos generales o no vida, presentando éstos las características que se han ido detallando. El coste de todo riesgo viene dado, como es evidente, por la materialización del riesgo en siniestro. Cuando hablamos de coste estadístico es porque estamos hablando de coste en términos de probabilidad. Si el riesgo se transforma en siniestro, nos encontramos en presencia de un coste real, que ha de satisfacer la entidad aseguradora al asegurado.

Pues bien, en el coste de un riesgo concurren dos circunstancias que, en el caso de los seguros no vida, son ambas aleatorias, y, por tanto, generadoras de incertidumbre: a/ la materialización del riesgo en siniestro; b/ la cuantía económica del siniestro. En términos del ente asegurador se puede hablar de otro componente aleatorio: el número de siniestros acaecidos en un determinado período temporal. Todos estos elementos o variables definen un proceso de riesgo que, como proceso estocástico, es preciso establecer adecuadamente. Conviene, sin embargo, perfilar, en primer lugar, de manera adecuada, lo que entenderemos por tiempo actuarial como tiempo interno del proceso en contraposición con el tiempo físico o absoluto en el que aquél se desarrolla. Ya en la biometría actuarial se habla del tiempo biométrico, expresando mediante él la edad del asegurado, que, variando en un intervalo $(0, \omega)$, se halla inmersa en el marco del tiempo físico o absoluto, que es el tiempo medido a través del reloj o calendario. Así Vegas Pérez (1) dice que: "como quiera que al plantearnos la cuestión de definir el fenómeno de la supervivencia aparece como elemento especialmente significativo la

(1) Vegas Pérez, Angel: Estadística Actuarial. Teoría de la Supervivencia.

edad, tomaremos la expresión de la misma como parámetro fundamental del fenómeno, designándolo con el nombre de tiempo biométrico. Esta denominación está justificada por el hecho de que las variaciones biológicas del individuo se realizan en el tiempo físico o absoluto, pero se manifiestan con referencia a la edad, que en alguna medida, constituye el tiempo interno del individuo, según la concepción de Alexis Carrel... El carácter relativo de la dimensión temporal de la edad de un individuo aparecería con toda claridad, si estableciéramos la comparación entre un individuo que tuviera 30 años en el año 1.800 y otro que tuviera la misma edad en 1.965. Por ello, aunque las variaciones de la edad se realicen en el tiempo físico, para nosotros serán esencialmente distintos el tiempo físico y el tiempo biométrico". Nosostros, en el proceso de riesgo, hablaremos del tiempo actuarial como periodo de tiempo en el que el proceso está sometido a observación. Dicho tiempo actuarial, que puede tener la duración de un año, un mes, una semana, etc., según nuestras necesidades de análisis, lo representaremos por τ , y se encontrará inmerso en el marco del tiempo físico t .

Fues bien, puntualizados estos conceptos, pasamos a definir lo que entenderemos por proceso general de riesgo, que será el modelo que nos establezca el coste estadístico del riesgo.

Situados en el tiempo físico t , consideramos un tiempo actuarial de observación τ , por ejemplo, un año. Representaremos por $n(\tau, t)$ el número de siniestros acaecidos durante el tiempo actuarial τ (en el tiempo físico t); por ejemplo el número de siniestros acaecido a lo largo del año 1.980. $n(\tau, t)$ constituye, evidentemente, una variable aleatoria de carácter discreto. Cada vez que se produce un siniestro, éste dará lugar a una indemnización económica. Representaremos por x_r la cuantía correspondiente al r -ésimo siniestro. x_r es, así mismo, una variable aleatoria, aunque ésta de tipo continuo. Durante el tiempo actuarial τ , situado en el tiempo físico t , se puede producir un número aleatorio de siniestros, supongamos que n , que darán lugar a unas indemnizaciones aleatorias x_1, x_2, \dots, x_n . Entenderemos entonces por proceso general de riesgo al importe o cuantía total de los siniestros acaecidos en el tiempo actuarial τ (situado éste en el tiempo físico t). Es decir, expresado tal proceso mediante la variable $X(\tau, t)$, está quedará definida mediante:

$$X(\tau, t) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

supuesto que en τ se hayan producido n siniestros.

La razón de llamar a la variante X proceso de riesgo estriba en que se trata de un proceso estocástico, concretamente un proceso aditivo con variantes asociadas. Recordemos brevemente el significado de estos conceptos. Un proceso estocástico es una variante dependiente de un parámetro $t, \{\xi_t, t \in T\}$, o, si se prefiere, $\{\xi(t), t \in T\}$, donde a T se la denomina conjunto índice del proceso y representa el dominio del parámetro. (La definición formalizada de proceso estocástico debida a Slutski y Kolmogoroff puede verse, por ejemplo, en el libro de Ubaldo Nieto de Alba: "Introducción a la Estadística"(1). Tal parámetro t puede tener o no carácter temporal, y, en este sentido, podía haberse elegido una terminología diferente y más acorde con las expresiones usuales de parámetros, tales como α , θ , etc. Sin embargo, y debido a que en la gran mayoría de los casos (y en el nuestro concreto) tal parámetro tiene carácter temporal, la expresión usual es la que hemos dado. Pues bien, el parámetro t , puede ser continuo o discreto y, en este sentido, se hablará de procesos de carácter continuo y procesos de carácter discreto. Ejemplos de procesos de carácter discreto serían: $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, etc. Ejemplos de procesos de carácter continuo serían: $T = \{t | -\infty < t < \infty\}$, $T = \{t | t \geq 0\}$, etc.

Entre los procesos estocásticos de carácter discreto, y, en concreto, entre los procesos aditivos, va a haber uno especialmente interesante para nosotros, cual es el proceso aditivo con variantes asociadas. Siguiendo a Vegas Pérez (2), consideremos la variante:

$$\eta_{(n)} = \sum_{i=1}^n \eta_i$$

Si el sistema se encuentra en la situación n , aparece la variante asociada $\eta_{(n)}$. Si n fuese una variable aleatoria (como ocurre en nuestro caso del proceso de riesgo), el paso del es-

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Introducción a la Estadística. Conceptción Bayesiana. Aguilar, 1973. Tomo II. Pag. 199

(2) Vegas Pérez, Angel: Apuntes de la Cátedra de Estadística Actuarial. Introducción a la Estadística Bayesiana. Pag. 161.

tado E_n al estado E_{n+1} se realizaría con una cierta probabilidad y, además, aparecería otra variante $\eta_{(n+1)} = \eta_{(n)} + \eta_{n+1}$. Esto significa que tendremos un proceso aditivo respecto a la variante $\eta_{(n)}$, asociada con el proceso aditivo simple respecto a n .

Las características fundamentales de esta clase de procesos vienen desarrolladas en la obra mencionada en las páginas 162 y 163, por lo que obviemos el tratamiento de las mismas. Lo que sí queremos puntualizar es que, como resulta evidente, el que hemos definido como proceso general de riesgo se ajusta a las características de este proceso estocástico, es decir, el proceso de riesgo es un proceso estocástico aditivo con variantes asociadas. Parece, por tanto, suficientemente justificada la denominación empleada y, lo que es más importante, determinado el modelo que permitirá el análisis de la variante objeto de nuestro interés.

Con independencia de que el proceso general de riesgo sea pormenorizadamente analizado en posteriores apartados de este trabajo, parece oportuno establecer una clasificación de interés en él. Se trata de diferenciar a los procesos estacionarios respecto de los procesos evolutivos o no estacionarios. Vegas Pérez (1), en la obra citada, define a un proceso estocástico como estacionario cuando su distribución finito-dimensional cumple la condición de ser invariante respecto de un desplazamiento h en el tiempo, es decir:

$$F_{t_1 t_2 \dots t_n}(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv F_{t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h}(x_1 x_2 \dots x_n)$$

En iguales términos se expresa Nieto de Alba (2), cuando dice que un proceso es estacionario si sus funciones de distribución cumplen:

$$F(t, n, u_1, u_2, \dots, u_n) = F(t+k, n, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

para todo: $n > 0$, $-\infty < t < \infty$, $-\infty < k < \infty$ y $-\infty < u_1 < \infty$, es decir, que las funciones de distribución sean invariantes respecto a una traslación en el tiempo. En otro caso, al proceso se le llamará no estacionario o evolutivo.

(1) Vegas Pérez, Angel: Obra citada. Pag. 125

(2) Nieto de Alba, Ubaldo: Obra citada. Pag. 201-202

Otros autores, entre los que cabría citar a Doob, Takács, Loeve, Parze, etc., pormenorizan más la definición, al hablar de dos tipos de procesos estacionarios, los que lo son en sentido estricto y los estacionarios en sentido amplio. Takács (1), en concreto, dice que un proceso estocástico $\{\xi_t, t \in T\}$ es estacionario en sentido estricto si la función de distribución conjunta de las variables aleatorias $\{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}\}$ para todos aquellos valores de n para los cuales tanto t_1, t_2, \dots, t_n como $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau$ se encuentran dentro del conjunto T . Por el contrario, un proceso estocástico $\{\xi_t\}$ es estacionario en sentido amplio si $E\{\xi_t\}$ y $E\{\xi_t^2\}$ existen y son independientes de t , y, además, $E\{\xi_t \xi_{t+\tau}\}$ sólo depende de τ , donde $t \in T$ y $t + \tau \in T$, es decir, sólo depende de la distancia temporal entre las variantes. Estos son los procesos a los que Parzen (2) llama estacionarios de covarianza, si bien este autor, definido el núcleo de covarianza de un proceso estocástico $\{x(t), t \in T\}$ con momentos de segundos finitos como la covarianza: $k(s, t) = \text{Cov}[x(s), x(t)]$, $\forall s, t \in T$, define a un proceso estocástico como estacionario de covarianza si posee momentos segundos finitos, si su conjunto índice T es lineal (T es un conjunto índice lineal $\Leftrightarrow t \in T, \forall h \in T, t + h \in T$) y si su núcleo de covarianza $K(s, t)$ es una función exclusivamente de la diferencia absoluta $|s - t|$. Es evidente la identidad de los conceptos "estacionario en sentido amplio" y "estacionario de covarianza". Es, así mismo, evidente que todo proceso estacionario en sentido estricto lo será en sentido amplio, sin que se verifique la proposición recíproca. De ahí la corrección de la terminología empleada.

Puesto que no resulta necesario a los efectos de nuestro estudio, vamos a limitarnos a hablar de los procesos estacionarios en sentido estricto, a los que llamaremos simplemente procesos estacionarios, siendo los que no cumplan la condición de estacionariedad, procesos evolutivos o no estacionarios.

(1) Takács, Lajos: Stochastic Processes. Problems and Solutions. Methuen, 1960
Pag. 52-53

(2) Parzen, Emanuel: Procesos Estocásticos. Paraninfo, 1972. Pag. 89.

Una importante propiedad de los procesos estacionarios, como ya sabemos, es la llamada propiedad "espectral", cuya formulación viene dada por la expresión:

$$\rho_{\tau} = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \tau \lambda d W(\lambda)$$

o también, en virtud del teorema de inversión de Fourier,

$$W(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin' \tau \lambda}{\tau}$$

en donde ρ_{τ} es el coeficiente de autocorrelación de desplazamiento temporal τ y $W(\lambda)$ la función espectral referida a la frecuencia λ . Como la densidad espectral es:

$$\omega(\lambda) = \frac{d W(\lambda)}{d \lambda}, \text{ tendremos: } ,$$

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda \tau \rho_{\tau}$$

Estas expresiones permiten el estudio del proceso, bien en el campo de las correlaciones temporales, bien en el de las frecuencias con que se presentan las componentes del propio proceso.

Dentro de los procesos no estacionarios, existe una importante clase, llamada evolutiva, en la cual es posible, mediante un filtro lineal de la forma

$$Y_t = \sum_{s=p}^q b_s x_{t+s}$$

convertidos en procesos estacionarios, con la posibilidad entonces de ser tratados mediante el análisis espectral. Este es el caso más frecuente en las series económicas.

Al ser el proceso de riesgo un proceso estocástico, cabe establecer en él una clasificación en procesos estacionarios y evolutivos o no estacionarios. Y vamos a establecer dicha clasificación a través de las llamadas distribuciones básicas, que son las que corresponden a las dos variables aleatorias fundamentales del proceso, el número de siniestros en el tiempo observacional y la cuantía de cada uno de dichos siniestros. Represen-

tamos tales distribuciones de la siguiente forma:

$P_n(\tau, t)$ será la función de cuantía (distribución discreta) de la distribución de probabilidad del número de siniestros, y expresará, por tanto, la probabilidad de que en el tiempo actuarial τ (situado en el tiempo físico t) se produzcan exactamente n siniestros.

$V_{x_r}(x, \tau, t)$ será la función de distribución de probabilidad (distribución continua) de la distribución de probabilidad del siniestro x_r , es decir, expresa la probabilidad de que, en el tiempo actuarial τ (en el tiempo físico t), el siniestro r -ésimo comporte una indemnización que no exceda de x unidades monetarias, es decir para τ y t , $P(x_r \leq x)$. A esta función de distribución hay autores que la representan por $G_{x_r}(x, \tau, t)$ o bien $S_{x_r}(z, \tau, t)$. Nosotros utilizaremos indistintamente cualquiera de estas terminologías.

De esta forma, surge la que será denominada distribución del daño total en el tiempo actuarial τ (en el tiempo físico t), definida por la función de distribución de la variante del proceso, $X(\tau, t)$:

$$F(x, \tau, t) = P(X(\tau, t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau, t) G(x/n).$$

siendo $G(x/n)$ (referida a τ y t) la función de distribución de la distribución de la cuantía del daño para n siniestros, y que para el supuesto de que las cuantías de los siniestros sean independientes del número de ellos ocurridos, definirán la expresión:

$$F(x, \tau, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau, t) G^{n*}(x, \tau, t)$$

donde $G^{n*}(x, \tau, t)$ es la convolución n -ésima de $G(x, \tau, t)$.

Pues bien, diremos que un proceso de riesgo es estacionario si sus dos distribuciones básicas son independientes del tiempo físico o absoluto t en que dicho proceso se desarrolla. En este caso, como es evidente, la función aleatoria que define el proceso $X(\tau, t)$ no depende del tiempo físico t , $X(\tau, t) = X(\tau)$. En este sentido el proceso es estacionario si podemos afirmar que $P_n(\tau, t) = P_n(\tau)$ y, así mismo, $G_{x_r}(x, \tau, t) = G_{x_r}(x, \tau)$. En estos

casos, y por simplicidad terminológica, se suele representar al tiempo actuarial mediante la letra latina t . Por el contrario, un proceso de riesgo es evolutivo o no estacionario cuando al menos una de sus distribuciones básicas depende del tiempo físico o absoluto t en el que se desarrolla en proceso.

La profundización en el análisis del proceso general de riesgo comporta el estudio detallado de las distribuciones básicas que lo definen. A dicho estudio se dedica el apartado que a continuación comenzamos.

II.2.- DISTRIBUCIONES BASICAS DEL PROCESO DE RIESGO

Como hemos indicado en el apartado anterior, referido al Proceso General de Riesgo, entendemos por distribuciones básicas del proceso de riesgo a las de las dos variables aleatorias que definen el proceso, a saber, el número de siniestros en el tiempo observacional t y la cuantía de cada uno de dichos siniestros, es decir, de las indemnizaciones que tales siniestros comportan.

Quizá sea oportuno, antes de entrar en el análisis de dichas distribuciones, establecer una breve sinopsis del modelo que conducirá a la tarificación de los riesgos. Nuestra pretensión ahora no es entrar en el tema de la tarificación, que será objeto de estudio en los apartados III.4 y siguientes, sino presentar una breve panorámica del modelo que se está estableciendo, a efectos de que la idea de conjunto resulte clarificada.

La pretensión de todo el análisis de las distribuciones básicas es, en definitiva, llegar al establecimiento de la distribución del daño total, que es la que permitirá establecer la tarificación con un sentido equitativo. En efecto, la distribución del daño total, que es, en síntesis, la distribución del proceso de riesgo, es la que nos habla del coste de siniestralidad para el ente asegurador, y, por tanto, el modelo básico para el establecimiento de la política de ingresos, es decir, de primas. Pero el establecimiento de la distribución del daño total pasa necesariamente por la definición de las distribuciones básicas en que se sustenta. Incluso, como tendremos ocasión de hacer, pasa por un estadio intermedio, si no necesario, sí al menos conveniente, cual es el de la definición de la distribución de la cuantía del daño para n siniestros, es decir, cuando se fija el valor de uno de los parámetros que definen el proceso, el número de siniestros, n .

El análisis de la concepción clásica de la tarificación en la matemática de los seguros generales nos clarificará, sin duda, las ideas respecto al modelo a establecer. En términos clásicos, se habla, por supuesto, de dos distribuciones básicas: la del número de siniestros, con función de cuantía $P_n(t)$, y la de la cuantía

tía de cada siniestro individual, con función de distribución $V_{x_r}(x,t)$, y de una distribución del objetivo del modelo, la distribución del daño total, $F(x,t)$. La primera distribución $P_n(t)$, es de tipo discreto, y nos habla del número de siniestros que se pueden producir en el proceso de observación o tiempo actuarial t (año, mes, etc.). La esperanza matemática de dicha distribución será:

$$\bar{n} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k(t)$$

Pues bien, en la concepción clásica de la matemática de los seguros generales se definirá un parámetro empírico, la llamada frecuencia de siniestralidad, de la siguiente forma:

$$f = \frac{\text{Nº de siniestros}}{\text{Nº de expuestos al riesgo}} = \frac{n}{N}$$

y se tomaba a dicho estadístico como estimador de la media poblacional, $\bar{n} = f$. De esta forma, se establecía, por un mecanismo sencillo, una estimación del parámetro \bar{n} . Debe resaltarse el hecho de que f no es una auténtica frecuencia relativa, por cuanto no está acotada superiormente por la unidad, si bien no puede ser negativa. Así, por ejemplo, en el seguro del automóvil, en la modalidad de daños al propio vehículo, es frecuente encontrarse con valores de f del orden de 1,20 e incluso superiores.

La segunda distribución, $V_{x_r}(x,t)$ es de tipo continuo, y tiene por valor probable:

$$c_1 = \int_0^{\infty} x \, dV_{x_r}(x,t)$$

Es frecuente la hipótesis de que la cuantía de los siniestros es independiente del número de ellos ocurridos, por lo que, en el contexto de dicha hipótesis, todas las variantes x_i , $i=1,2,\dots$ están igualmente distribuidas y, además, son estocásticamente independientes entre sí. De esta forma hablaremos únicamente de la función de distribución $V(x,t)$, cuyo valor probable será:

$$c_1 = \int_0^{\infty} x \, dV(x,t)$$

Pues bien, en la concepción clásica, se define el parámetro empírico:

$$\bar{c} = \frac{\text{Sumas pagadas por siniestros}}{\text{Nº de siniestros ocurridos}} = \frac{S}{n}$$

y se utiliza a dicho estadístico como estimador del parámetro poblacional c_1 , es decir, $c_1 = \bar{c}$.

De esta forma se efectuaba el cálculo de la prima pura o de riesgo a través de la relación:

$$P = \frac{\text{Sumas pagadas}}{\text{Nº de expuestos al riesgo}} = \frac{S}{N} = \frac{n S}{N n} = f \cdot \bar{c}$$

es decir, se definía la prima pura como el producto de ambos estimadores. De esta forma, se definía la prima de riesgo por la estimación de $\bar{n} c_1$, que resulta ser el valor probable de la distribución del daño total. En efecto, definida la función de distribución $F(x,t)$ de la distribución del daño total como la de la variante $X(t)$ del proceso de riesgo, se verifica que, si admitimos la hipótesis de que la cuantía de los siniestros es independiente del número de ellos acaecidos, dicha función de distribución es:

$$F(x,t) = P(X(t) \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \cdot v^{k*}(x,t)$$

siendo $v^{k*}(x,t)$ la convolución n -ésima de $V(x,t)$.

Entonces el valor probable de dicha distribución del daño total será:

$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &= \int_0^{\infty} x \, dF(x,t) = \int_0^{\infty} x \, d\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) v^{k*}(x,t) \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \int_0^{\infty} x \, d v^{k*}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \cdot k \cdot \bar{c} = \\ &= \bar{c} \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(t) = \bar{n} \cdot \bar{c}. \end{aligned}$$

Por tanto, en la concepción clásica se definía la prima pura a través del estimador del valor probable de la distribución del daño total, lo que, si bien resulta ser un proceso lógico y ra-

cional, no es suficiente cuando se da entrada a problemas de estabilidad del ente asegurador.

El análisis que hemos efectuado sobre la concepción clásica de la tarificación en la matemática de los seguros no-vida nos ha permitido ver, en una rápida panorámica, cuáles son los elementos del modelo que se va a establecer, y qué papel juegan en dicho modelo las distribuciones básicas, objeto de estudio en este apartado, así como la fundamental distribución del gasto total. Parece pues, llegado el momento de estudiar dichas distribuciones básicas.

Antes, sin embargo, de efectuar dicho estudio, es preceptivo referirse a un problema importante, cual es el problema de la homogeneidad de riesgos. Para que se puedan establecer adecuadamente las distribuciones básicas y aplicarlas, el primer paso a dar es el de la formación de grupos homogéneos. Ello nos conduce al concepto de clases homogéneas de riesgos. Esta clasificación cualitativa es de la mayor importancia. Citemos el ejemplo del seguro de incendios, en donde se forman grupos o clases homogéneas hasta para edificios localizados en lugares donde no hay servicios de bomberos. En el seguro del automóvil, son clásicas las clases de riesgo según: Potencia del vehículo, localidad, valor del vehículo, años de seguro, edad del asegurado, antigüedad del carnet de conducir, etc.

Los especialistas en tarificación de riesgos llegan a veces a clasificaciones tan minuciosas que olvidan que un principio básico establece la imposibilidad de homogeneizar por subdivisiones sucesivas, debido a la progresiva pérdida de precisión estadística. Desde el punto de vista estadístico, la homogeneidad aumenta con la dimensión de los grupos de riesgo, debido a la mayor estabilidad de las distribuciones básicas.

Como dice Almer (1) "el problema fundamental en las estadísticas de riesgos generales es el problema del factor, es decir,

(1) Almer, Bertil: Risk Analysis in Theory and Practical Statistics. Transactions of the XV International Congress of Actuaries. New York, 1957. Tomo II, Subject III. Pag. 314-370

separar distintos factores de riesgo y determinar su influencia en el riesgo total a través de la frecuencia de reclamaciones, cuantía de las indemnizaciones y primas de riesgo. Comparado con el seguro de vida, este problema es complicado por la existencia de varios factores de importancia relativa, en comparación con el factor edad en el seguro de vida".

Este autor, en el trabajo citado, aplica la técnica del análisis del factor al seguro del automóvil, técnica que tendremos ocasión de analizar en el apartado II.5 de este trabajo.

El criterio de los tarificadores prácticos de proceder por subdivisiones sucesivas individualizando al máximo el riesgo no es admisible, con arreglo a estos principios. Por otra parte, no se debe olvidar que no existe otro criterio más que el de hallar un precio medio (estadístico) del seguro.

Cuando se quiere aislar algún factor de riesgo, la técnica estadística idónea es el análisis de la varianza. Sin embargo, al aplicar esta técnica a algunas tarifas, se ha encontrado que ciertos factores de riesgo representaban un porcentaje muy pequeño de la varianza total. Así, sigamos a Delaporte (1) en su "Análisis de la heterogeneidad de las frecuencias de accidentes de los vehículos", dentro del artículo que reseñamos.

"Consideramos para cada uno de los vehículos las siguientes características:

Z = Zona de garage habitual.

U = Uso del vehículo y profesión de su propietario.

F = Potencia fiscal del motor del vehículo.

Estas tres primeras características son las que figuran en la tarifa del seguro de automóviles francés.

T = Modelo y constructor del vehículo (solamente para los vehículos de grandes series).

y definamos las siguientes variables:

(1) Delaporte, Pierre J.: Sur l'efficacité des critères de tarification de l'assurance contre les accidents d'automobiles. Bulletin Trimestriel de L'Institut d'Actuaires Français. N° 238. Pag. 41-51

S'_{ZUFTi} = número de accidentes observados del vehículo i de características Z, U, F, T durante el año 1959.

S'_{ZUFT} = $(\sum_i S'_{ZUFTi})/n_{ZUFT}$, media aritmética de los números de accidentes ocurridos a los vehículos de iguales características Z, U, F, T

S'_{ZUF} = $(\sum_T n_{ZUFT} S'_{ZUFT})/n_{ZUF}$, media aritmética de los números de accidentes ocurridos a los vehículos de igual Z, U, F

S'_{ZU} = $(\sum_F n_{ZUF} S'_{ZUF})/n_{ZU}$, media aritmética de los números de accidentes ocurridos a vehículos con iguales Z, U .

S'_Z = $(\sum_U n_{ZU} S'_{ZU})/n_Z$, media aritmética de los números de accidentes ocurridos a los vehículos pertenecientes a la misma zona de garage Z .

S' = $(\sum_Z n_Z S'_Z)/n = (\sum_{ZUFTi} S'_{ZUFTi})/n$, media aritmética de los números de accidentes ocurridos al conjunto de vehículos.

La suma de las desviaciones cuadráticas entre el número de siniestros acaecidos a cada vehículo y el número medio de siniestros se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{ZUF Ti} \sum_i (S'_{ZUFTi} - S')^2 &= \sum_Z \sum_U \sum_F \sum_T \sum_i (S'_{ZUFTi} - S'_{ZUFT})^2 + \\ &+ \sum_{ZUF T} \sum_i n_{ZUFT} (S'_{ZUFT} - S'_{ZUF})^2 + \sum_Z \sum_U \sum_F n_{ZUF} (S'_{ZUF} - S'_{ZU})^2 + \\ &+ \sum_Z \sum_U n_{ZU} (S'_{ZU} - S'_Z)^2 + \sum_Z n_Z (S'_Z - S')^2 \end{aligned}$$

donde los valores numéricos encontrados para los 55.562 accidentes observados sobre un total de 169.950 vehículos analizados son, respectivamente:

$$80.296,5 = 72.290,1 + 1.001,3 + 262,2 + 1.570,0 + 5.172,9$$

De esta forma, se obtiene la siguiente tabla de descomposición de la varianza total según factores:

<u>Parte de la varianza debida a</u>	<u>Varianza</u>	<u>%</u>
Zona de garage habitual	0,0304	6,5
Uso y profesión	0,0092	2,0
Potencia del motor	0,0015	0,3
Tipo y constructor	0,0059	1,2
Otras causas	0,4254	90,0
Total	0,4724	100,0

Si bien la zona de garage habitual del vehículo aún explica el 6,5% de la varianza, los otros criterios son de una importancia muy escasa, y no representan en total ni siquiera al 10% de la varianza total. Queda por explicar el 90% de dicha varianza. Todo ello pone de manifiesto la heterogeneidad en el acaecimiento de los accidentes por parte de los automóviles de una misma clase de tarifa de seguros, es decir, de los vehículos que pertenecen todos a la misma zona de garage habitual, el mismo uso, la misma potencia fiscal y el mismo modelo".

Todo ello supone que, aún dentro de la misma clase, no existe la misma frecuencia de siniestralidad para todos los asegurados. Este hecho nos conduce a la siguiente conclusión, referida en concreto a la distribución del número de siniestros: La distribución de probabilidad del número de siniestros está formada por la superposición de dos distribuciones: a/ La que nos da la probabilidad de la aparición de n siniestros ($n=0,1,2,\dots$), para cada elemento asegurado; b/ La probabilidad de que dicho elemento pertenezca a una clase de tarifa (función de estructura de los grupos homogéneos). El capítulo primero del libro de Kupper (1) está enteramente dedicado a este problema.

Podemos ya dedicarnos al estudio de las distribuciones básicas del proceso de riesgo.

(1) Kupper, Josef: Wahrscheinlichkeits theoretische Modelle in der Schandenversicherung. 1962.

II.2.1.- DISTRIBUCION DEL NUMERO DE SINIESTROS

Una forma sencilla de acercarse al problema de las distribuciones básicas es la de Beard, Pentikäinen y Pesonen, en su conocido texto "Risk Theory"(1).

En él, proponen distinguir dos casos: un primer caso simplificado, en el que todos los siniestros son de igual montante, en el sentido de que todas las unas aseguradas son de igual cuantía, por lo que la única variable propiamente aleatoria es el número de siniestros ocurridos, y otro, el caso general, en que las indemnizaciones son de distinta cuantía. Así, al hablar de los "procesos con cuantía constante de cada siniestro", surge "el caso más sencillo que es aquél en que los siniestros producidos en la cartera de seguros considerada son todos del mismo montante. Si se toma dicho montante constante como la unidad monetaria, el coste total para el ente asegurador será igual al número de siniestros. El problema es, entonces, encontrar la distribución de probabilidad del número de siniestros, es decir, la función $P_k(t)$ que nos dé la probabilidad de que el número de siniestros en el periodo temporal t sea igual a k ".

En el análisis de dicha distribución de probabilidad, la metodología a seguir puede ser muy diversa. Nosotros vamos a seguir la que consideramos más acertada, que es la desarrollada en el interesante artículo de Nieto de Alba, titulado "La distribución del número de siniestros en la matemática del seguro"(2).

En dicho artículo, el autor estudia la distribución del número de siniestros en dos partes, es decir, según dos métodos. En la primera parte, se produce el estudio partiendo de los esquemas de urnas que conducen a las distribuciones de Poisson y Polya.

(1) Beard, R.E.- Pentikäinen, T.- Pesonen, E.: Risk Theory. The Stochastic Basis of Insurance. Ed. Chapman and Hall. Second Edition, 1977. Pag. 7.

(2) Nieto de Alba, Ubaldo: La distribución del número de siniestros en la matemática del seguro. Estadística Española nº 23. Abril-Junio, 1964. Pag. 5-18

En la segunda parte, estudia el problema a la luz de la teoría de los procesos estocásticos, que, por el encadenamiento de los sucesos, van a ser procesos de Markov.

Analícemos, en primer lugar, la distribución del número de siniestros partiendo de los esquemas de urnas de Bernoulli y de Polya-Eggenberger. El proceso de generación de distribuciones será el siguiente: A partir de un esquema de urnas de Bernoulli, nosotros consideraremos, en primer lugar, un número N de bolas en la urna finito, es decir, en términos actuariales, un número N de expuestos al riesgo finito pero desconocido. Según que después de cada extracción de bola se produzca o no contagio tendremos, en el caso de ausencia de contagio, es decir, de independencia estocástica, una distribución binomial, y en el caso primero, es decir, de contagio, una distribución de Polya-Eggenberger, si el contagio es positivo, o, en el caso más general, una distribución de Polya-Eggenberger generalizada. Ahora bien, ¿cuál es el número N de expuestos al riesgo?. No lo podemos saber con carácter general. Por ello, surge el proceso de paso al límite, $N \rightarrow \infty$, que, en determinadas condiciones, nos define la distribución de Poisson, a partir de la distribución binomial, o bien la distribución binomial negativa como límite de la distribución de Polya-Eggenberger. Por ello, nosotros siempre trabajaremos con la distribución de Poisson (ausencia de contagio) o bien con la distribución binomial negativa (contagio positivo débil). Aunque definamos estas distribuciones de distintas formas, a efectos de hacer nuestro estudio lo más completo posible, el esquema básico es el que acabamos de establecer.

Definamos ya las distintas distribuciones de las que venimos hablando.

II.2.1.1.- DISTRIBUCION BINOMIAL

Dado lo conocido de esta distribución, nos limitaremos a trazar una leve pincelada sobre la misma.

Sea un fenómeno dicotómico, por ejemplo, extracciones de bolas de una urna que contiene bolas de dos colores, blanco y

negro. Supongamos que la urna contiene N bolas, de las que n son blancas y las restantes, $N-n$, son negras. La probabilidad de bola blanca será entonces $p = n/N$, y la de la bola negra $q = 1-p = (N-n)/N$. La distribución de una extracción será $B(1;p)$. Sea ξ_i la extracción i -ésima, con $\xi_i = 0$ si la bola es negra y $\xi_i = 1$ si es blanca. Sea $\eta_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$, número de bolas blancas en N extracciones. Si las extracciones son con reemplazamiento, es decir, ξ_i es estocásticamente independiente de ξ_1, \dots, ξ_{i-1} , entonces η_N se dice que sigue una distribución binomial $B(N;p)$. En términos actuariales, la hipótesis de independencia supone admitir que el acaecimiento de un siniestro no tiene influencia sobre los demás expuestos al riesgo (contagio positivo) o no modifica la probabilidad del elemento siniestrado debido, por ejemplo, a una mayor precaución (contagio negativo). Los parámetros de la distribución binomial tienen la siguiente interpretación actuarial:

N = Número de expuestos al riesgo.

n = Número de siniestros, entre los expuestos al riesgo.

p = Probabilidad de siniestro.

$q = 1-p$ = Probabilidad de no siniestros.

La función de cuantía de la distribución, probabilidad de que en el tiempo actuarial t se produzcan n siniestros entre los N expuestos al riesgo será:

$$P_n(t) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$$

Los parámetros que definen a la distribución son N y p . Los posibles valores de la variante n serán $n = 0, 1, \dots, N$. Los Momentos fundamentales de la distribución son:

$$\text{Media} = E(n) = Np$$

$$\text{Varianza} = V(n) = Npq$$

siendo la función característica: $P_\eta(t) = (q + e^{it}p)^N$

II.2.1.2.- DISTRIBUCION DE POISSON SIMPLE

Sea una variante distribuida $B(N,p)$ y hagamos $Np = \lambda$, constante y finita para todo valor de N y de p . Hagamos $N \rightarrow \infty$ (número

de expuestos al riesgo infinito), en cuyo caso, para que se mantenga el valor $N_p = \lambda$, habrá de ser $p \rightarrow 0$. Por eso, a esta ley se la denomina "ley de los casos raros". En nuestra interpretación actuarial, la probabilidad de siniestro habrá de ser pequeña, el "suceso siniestro" habrá de ser un "caso raro" en el contexto de la cartera del ente asegurador. Veamos entonces cuál es la función de cuantía de la distribución de Poisson como límite de la distribución binomial. Las probabilidades básicas serán.

$$P = \frac{\lambda}{N} \quad q = 1-p = 1 - \frac{\lambda}{N}$$

$$\begin{aligned} P_n(t) = P(\xi=n) &= \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \frac{N!}{N^n(N-n)!} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-n} \end{aligned}$$

Pero $\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\dots(N-n+1)$, luego

$$P_n(t) = \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-n}$$

Si hacemos ahora que $N \rightarrow \infty$, tendremos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = 1$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-n} = 1$$

En consecuencia, la función de cuantía buscada será:

$$P_n(t) = P(\xi=n) \rightarrow \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Sus parámetros fundamentales son:

$$\text{Media} = E(\xi) = \lambda$$

$$\text{Varianza} = V(\xi) = \lambda$$

El elemento característico de una distribución de Poisson es, precisamente, la igualdad de media y varianza, lo que se interpreta en términos actuariales diciendo que hay ausencia de contagio. Esto es cierto habida cuenta de que los supuestos en que se sustenta la distribución de Poisson son los mismos que fundamentan la distribución binomial, es decir, la independencia estocástica entre las distintas variantes sumandos, la característica de que la distribución de cada variante no viene influida por el comportamiento de las otras. En términos actuariales, el que un elemento expuesto al riesgo se traduzca, efectivamente, en siniestro, no afecta a la probabilidad de siniestros en los demás expuestos al riesgo, es decir, el acaecimiento de un siniestro es independiente del número de ellos ocurridos. Cosa distinta es la que sucederá con la distribución binomial negativa, en la que, si bien el contagio es débil y no afecta al valor medio, sí que lo hace con la varianza, como tendremos ocasión de ver.

Si el periodo de observación es el intervalo $(0,t)$ en vez del intervalo unitario $(0,1)$ entonces la distribución de Poisson pasa a tener por función de cuantía:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Puesto que el elemento característico de la distribución de Poisson es la igualdad entre su media y su varianza, un elemento indicador de que el fenómeno considerado es de Poisson lo da el hecho de que la media y varianza empíricas sean iguales entre sí. Veamos un ejemplo seleccionado de la obra de Nieto de Alba "Introducción a la Estadística"(1)

Ejemplo: Durante un trimestre, una compañía de seguros observó que de 100 pólizas habían sufrido siniestro las que se indican en la tabla siguiente:

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Introducción a la Estadística. Concepción Bayesiana. Tomo II. Aguilar, 1973. Pág. 110-111

Nº de siniestros (X)	Nº de pólizas (n)
0	74
1	23
2	2
3	1
	<hr/> 100

Media: $\bar{X} = 0,30$

Varianza: $S^2 = 0,31$

Como se aprecia, son muy próximos los valores de media y varianza, por lo que el ajuste de Poisson parece bueno. Tomando como estimador de λ a la media muestral $\bar{X} = 0,30$, que es eficiente y por máxima verosimilitud, tendremos como modelo teórico:

$$P_n(t) = \frac{(0,30 \times 4)^n}{n!} e^{-0,30 \times 4} = \frac{(1,20)^n}{n!} e^{-1,20}$$

donde el tiempo actuarial t es el año.

La función característica de la distribución de Poisson es:

$$\phi_{\xi}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

La función de distribución de esta distribución de Poisson será:

$$F(x) = \sum_{k=0}^h P_k(t) = \sum_{k=0}^h \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

donde, como es sabido, $F(x)$ expresa la probabilidad de que el número de siniestros sea $\leq x$, $x \in \mathbb{R}$ y $h = [x]$, parte entera de x , es decir, es el entero que verifica $h \leq x < h+1$.

La distribución de Poisson está tabulada, existiendo amplias tablas de su función de distribución, como, por ejemplo, las de Molina (1), o las de Kitagawa (2).

(1) Molina, E.C.: Tables of the Individual and Cumulative Terms of Poisson Distribution. D. Van Nostrand Co. Princeton, N.J., 1942
Poisson's Exponential Binomial Limit. Van Nostrand, 1949.

(2) Kitagawa, T.: Tables of Poisson Distribution. Tokyo, 1952.

Si el valor de n es pequeño, no hay problema alguno en el cálculo de $P_n(t)$. Ahora bien, si k es grande, se puede hacer uso de la fórmula de Stirling, que da la siguiente aproximación para $n!$

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Una demostración sencilla de dicha fórmula es, por ejemplo, la de Vegas Pérez (1). También puede consultarse la demostración de Feller (2). Y la de Beard (3), sin embargo, de la siguiente aproximación de Stirling para n :

$$n! = \sqrt{2k\pi} (n/e)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - R_n\right)$$

donde el resto R_n es del orden de $1/n^3$.

Dado que:

$$P_{n+1} = \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda}$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$P_{n+1}/P_n = \lambda/(n+1)$, se verifica la siguiente fórmula de recurrencia:

$P_{n+1} = P_n/(n+1)$, lo que nos permite elaborar fácilmente tablas para la distribución de Poisson.

Para valores grandes de n , se puede utilizar la siguiente fórmula aproximada, donde se ha prescindido del resto R_n :

$$P_n = \frac{288n \sqrt{n/2\pi}}{288n^2 + 24n + 1}$$

(1) Vegas Pérez, Angel: Deducción abreviada de la fórmula de Stirling para el cálculo de n . Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Tomo XXXVI, pag. 126-129

(2) Feller, William: Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones. Vol. 1. Ed. Limusa-Wiley, 1973. Pag. 67

(3) Beard - Pentikäinen - Pesonen: Obra citada. Pag. 11

Por otra parte, se puede demostrar que, siendo F la función de distribución de la distribución de Poisson, se puede expresar a la misma en términos de la función gamma incompleta, de la siguiente forma:

$$F(x) = \frac{1}{h!} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} t^h dt \quad \text{con } h = \{x\}, \text{ parte entera de } x.$$

Por último, si n es grande, se puede hacer uso del teorema central del límite, según el cual F tiende asintóticamente a la función de distribución de una distribución normal cuando $n \rightarrow \infty$, es decir,

$$F(x) \approx \Phi\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right)$$

donde Φ expresa la función de distribución de una distribución $N(0,1)$. En concreto, para valores de $n \geq 100$ y $0,01 \leq 1-F \leq 0,5$, el error relativo en la aproximación es $< 5\%$.

La distribución de Poisson como una distribución binomial compuesta

Aunque posteriormente tendremos ocasión de hablar de las distribuciones compuestas, concretamente de la distribución de Poisson compuesta, no por ello resulta menos conveniente ver como se puede definir a la distribución de Poisson como una distribución binomial compuesta, lo que mejora la comprensión del modelo.

Como es bien sabido, una distribución compuesta se define de la siguiente forma:

Sea ξ una variable aleatoria que depende de un parámetro N , que supongamos tiene el carácter de variable aleatoria. La distribución conjunta de ambas variantes será:

$$P(\xi=r; N=n) = P(\xi=r/N=n) P(N=n)$$

La distribución compuesta de ξ es entonces la distribución de ξ cualquiera que sea el valor del parámetro aleatorio N , es decir, la distribución marginal de ξ en la anterior distribución conjunta, a saber:

$$P(\xi=r) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi=r/N=n) P(N=n)$$

Diremos que una variante ξ sigue una distribución binomial compuesta si la distribución de ξ es binomial,

$$P(\xi=r) = \binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r}$$

Y N sigue una distribución de Poisson de parámetro ,

$$P(N=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Pues bien, veamos que la distribución binomial compuesta se reduce a una distribución de Poisson de parámetro λp . En efecto:

$$\begin{aligned} P(\xi=r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda} p^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\lambda^n (1-p)^{n-r}}{(n-r)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^r \lambda^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\{\lambda(1-p)\}^{n-r}}{(n-r)!} = \frac{e^{-\lambda} p^r \lambda^r}{r!} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(\lambda p)^r}{r!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

Como ejemplo sencillo de este tipo de distribución de Poisson como distribución binomial compuesta, tomamos el propuesto por Sixto Rios (1): La probabilidad de que un niño que va a nacer sea varón es $p=0,51$. La probabilidad para que una familia de N hijos tenga S varones será:

$$\binom{N}{S} 0,51^S 0,49^{N-S}$$

La probabilidad de que una familia cualquiera tenga S hijos varones será:

$$\frac{e^{-0,51\lambda} (0,51\lambda)^S}{S!}$$

Suponiendo que sea $e^{-\lambda} \frac{\lambda^S}{S!}$ la probabilidad de que una familia tenga S hijos.

(1) Rios, Sixto: Métodos estadísticos. Ed. del Castillo. Sexta Edición, 1967.

Hipótesis de no homogeneidad en el tiempo

Como tendremos ocasión de ver posteriormente al analizar el proceso estocástico de Poisson, esta distribución se fundamenta, además de en la hipótesis de independencia, en la hipótesis de homogeneidad en el tiempo, es decir, en suponer que el parámetro λ es constante en el tiempo.

Cuando esto no sucede, y λ es una función del tiempo, se podrá definir, de todas formas, la siguiente distribución de Poisson:

$$P_n(S, S+t) = \frac{(\lambda \Delta)^n}{n!} e^{-\lambda \Delta}$$

siendo:

$$\Delta = \int_S^{S+t} \mu(z) dz$$

donde se ha supuesto que $\lambda(t)$ se descompone en un producto de dos factores: uno constante, λ , y otro función del tiempo, $\mu(t)$, es decir, $\lambda(t) = \lambda\mu(t)$.

Hipótesis de contagio

Cuando al ocurrir un siniestro se modifica la probabilidad correspondiente a un nuevo siniestro, es preciso abandonar la hipótesis de independencia característica de la distribución de Poisson y de la distribución de la que ésta procede, al menos en el esquema que hemos analizado: la distribución binomial.

Aparecen, entonces, unas distribuciones, llamadas de contagio por el efecto futuro de cada suceso, que, habiendo surgido en otros campos de la ciencia (física, biología, etc.) se aplican también, y de una manera fundamental, al seguro.

La interpretación del contagio en el seguro se ha fundamentado en una doble consideración: a/ Que al producirse un siniestro (por ejemplo, un accidente de automóvil), el mismo influya en la propensión de otros objetos (en el caso del automóvil, otros conductores) hacía dicho siniestros, y b/ Que al producirse un siniestro, se modificara únicamente la probabilidad del objeto (conductor) que lo ha sufrido. Por ejemplo, un individuo

que ha sufrido un accidente de automóvil puede en el futuro mostrar una mayor propensión al accidente, por haber perdido su anterior seguridad en la conducción (tener más miedo, nervios). Por el contrario, puede suceder que dicha propensión al siniestro disminuya como consecuencia de una mayor precaución y experiencia. En el primer caso, se trataría de un contagio positivo, y en el segundo de un contagio negativo.

Comencemos a analizar las distribuciones de contagio, básicas como se ven en la teoría matemática del seguro, y en cuyos fenómenos la modelización de Poisson es insatisfactoria.

II.2.1.3.- DISTRIBUCION DE POLYA-EGGENBERGER

La distribución de Poisson se basa en los supuestos de independencia, homogeneidad en el tiempo y ausencia de contagio. Cuando surge el fenómeno del contagio, la distribución adecuada, para un número de expuestos al riesgo N finito, es la distribución de Polya-Eggenberger. Los trabajos de Polya y de su discípulo Eggenberger son, ciertamente, fundamentales en la teoría del contagio.

La distribución de Polya se basa, al igual que la distribución binomial, como igualmente ocurrirá con la distribución geométrica y la binomial negativa, en un esquema de urnas, que contengan bolas de dos colores. La diferencia radicaré en la forma de establecer las extracciones sucesivas, es decir, en la estructura de la urna al pasar de la i -ésima extracción a la de orden $i+1$.

Consideremos una urna que contiene a bolas blancas y b bolas negras (sólo bolas de dos colores, fenómeno dicotómico, vida o muerte, accidente o no accidente, etc.), de tal forma que el número total de bolas contenidas en la urna será $a+b = N$. Después de cada extracción, se devuelve a la urna, junto con la bola extraída, c bolas del correspondiente color (sea éste blanco o negro, es decir, el contagio c es de igual intensidad para ambos colores, tanto para siniestro como para no siniestro).

Esto supone que la extracción de la bola de un color aumenta la probabilidad de bola del mismo color en la siguiente extracción (supuesto que $c > 0$), en un porcentaje que inicialmente es $c/N = \delta$, si bien, el efecto de contagio se va paulatinamente am-
norando, pues tal, para la segunda extracción, sería $c/(N+c)$, pa-
ra la tercera $c/(N+2c)$, etc., es decir, cada vez altera menos
la estructura de probabilidad, debido a la constancia de \underline{c} .

Determinemos la ley de probabilidad de esta distribución, que, por ser discreta, vendrá definida a través de su función de cuantía. Elijamos, en primer lugar, un determinado orden para los resultados de las extracciones, y luego analizaremos la in-
variancia de la probabilidad respecto al orden. La probabilidad de que, en \underline{n} extracciones, se obtengan, en primer lugar, \underline{r} bolas blancas, y, a continuación, \underline{s} bolas negras (siendo $r+s = n$), será, haciendo uso de la conocida definición de Laplace de pro-
babilidad como cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, y de la probabilidad de la intersec-
ción como producto de probabilidades en condiciones de indepen-
dencia estocástica, la siguiente:

$$\frac{a(a+c)(a+2c)\dots(a+(r-1)c)b(b+c)(b+2c)\dots(b+(s-1)c)}{N(N+c)(N+2c)\dots(N+(r-1)c)(N+rc)\dots(N+(n-1)c)}$$

$$= \frac{\frac{a}{c}(\frac{a}{c}+1)(\frac{a}{c}+2)\dots(\frac{a}{c}+r-1)\frac{b}{c}(\frac{b}{c}+1)(\frac{b}{c}+2)\dots(\frac{b}{c}+s-1)}{\frac{N}{c}(\frac{N}{c}+1)(\frac{N}{c}+2)\dots(\frac{N}{c}+r-1)(\frac{N}{c}+r)\dots(\frac{N}{c}+n-1)}$$

Los \underline{r} primeros factores del numerador divididos por los \underline{r} primeros factores del denominador expresan la probabilidad de obtener \underline{r} veces la bola blanca (con contagio) en las \underline{r} prime-
ras extracciones, y los \underline{s} últimos factores del numerador dividi-
dos por los \underline{s} últimos factores del denominador expresan la proba-
bilidad de obtener \underline{s} veces bola negra (con contagio) cuando,
previamente, se han obtenido \underline{r} veces bola blanca, o bien, direc-
tamente de una urna que contiene $a+b+(r-1)c = N+(r-1)c$ bolas, de
las cuales $a+(r-1)c$ son blancas y b son negras, lo que es equiva-
lente a la anterior relación de condicionamiento.

Lo interesante de la relación anteriormente obtenida es que es válida para cualquier ordenación de los sucesos, es decir, expresa la probabilidad de obtener, en n extracciones, r bolas blancas y $s=n-r$ bolas negras, con independencia del orden en que éstas se obtengan, es decir, no sólo para el caso anterior en que en primer lugar se obtenían bolas blancas y a continuación todas negras. Ello es debido a que el contagio es el mismo para las bolas de los dos colores, es decir, el número de las que se incorporan a la urna en cada extracción es c , tanto si éstas son blancas como si son negras. Por ello, el denominador de la anterior relación, expresivo del número de casos posibles (número de bolas, sea cual sea su color), es el mismo en todas las ordenaciones,

$$\prod_{i=1}^{n-1} (N+ic)$$

Analicemos la invariancia del numerador. Supongamos una ordenación cualquiera de bolas extraídas, hasta obtener r blancas y $s=n-r$ negras. Sean x_1 bolas blancas, en primer lugar (x_1 puede ser 0), x_2 bolas negras a continuación, x_3 bolas blancas siguientes, x_4 bolas negras a continuación, etc., tales que $x_1+x_3+\dots = r$, $x_2+x_4+\dots = s$. El número de casos favorables a este suceso, según la terminología de Laplace, sería:

$$a(a+c)(a+2c)\dots(a+(x_1-1)c)b(b+c)(b+2c)\dots(b+(x_2-1)c)\cdot$$

$$\cdot(a+x_1c)\dots(a+(x_1+x_3-1)c)(b+x_2c)\dots(b+(x_2+x_4-1)c)\cdot\dots\cdot$$

$$\cdot(a+(r-1)c)\dots(b+(s-1)c) = \prod_{i=0}^{r-1} (a+ic) \prod_{j=0}^{s-1} (b+jc)$$

por la conmutatividad en el producto de números reales.

Por tanto, la probabilidad obtenida es válida para cualquier ordenación en la secuencia de colores. Obviamente éste no sería el caso, al obtener bola blanca, se incorporarían a la urna c_1 bolas de dicho color, y sí, al obtener negra, se incorporarían c_2 bolas negras, aparte de devolver la extraída, con $c_1 \neq c_2$. Pero este caso, que se supone una generalización del esquema de Polya-Eggenberger, lo analizaremos posteriormente.

Pues bien, hemos demostrado que la probabilidad de, en n extracciones, obtener r bolas blancas y $s = n-r$ bolas negras, es indiferente de la ordenación en la obtención de colores. Como el número de combinaciones en que, de n extracciones, obtenemos r bolas blancas es $\binom{n}{r}$, la probabilidad de obtener r bolas blancas en n extracciones será:

$$P_r = P(\xi=r) = \binom{n}{r} \frac{\frac{a}{c}(\frac{a}{c}+1) (\frac{a}{c}+2) \dots (\frac{a}{c}+r-1) \frac{b}{c}(\frac{b}{c}+1) \dots (\frac{b}{c}+s-1)}{\frac{N}{c}(\frac{N}{c}+1) (\frac{N}{c}+2) \dots (\frac{N}{c}+n-1)} =$$

$$= \frac{\binom{\frac{a}{c}+r-1}{r} \binom{\frac{b}{c}+s-1}{s}}{\binom{\frac{N}{c}+n-1}{n}} \quad \text{para } 0 \leq r \leq n$$

Haciendo:

$\frac{a}{N} = p$, probabilidad inicial de bola blanca.

$\frac{b}{N} = q$, probabilidad inicial de bola negra.

$\frac{c}{N} = \delta$, contagio inicial (contagio con motivo de la primera extracción).

$N = a+b(p+q=1)$, número inicial de bolas en la urna.
obtendremos la siguiente función de cuantía:

$$P_r = P(\xi=r) = \frac{\binom{\frac{p}{\delta}+r-1}{r} \binom{\frac{q}{\delta}+s-1}{s}}{\binom{\frac{1}{\delta}+n-1}{n}} \quad \text{con } 0 \leq r \leq n$$

En términos actuariales, n nos expresaría el número de los expuestos al riesgo y r el número de exposiciones que devinieron en siniestro, es decir, el número de siniestros producido. P_r sería, por tanto, la probabilidad de que se produzcan r siniestros entre n expuestos al riesgo, con contagio positivo después del acaecimiento de cada siniestro.

Como se aprecia, y hemos venido insistiendo en ello, en la distribución de Polya el número de expuestos al riesgo, n , es finito. Si queremos trabajar, en condiciones de contagio, con la distribución del número de siniestros con independencia del número de los expuestos al riesgo ($n \rightarrow \infty$), habremos de hacer uso, por ejemplo, de la distribución binomial negativa.

En ausencia de contagio, $c=0$, y por tanto, $\delta=0$, la distribución de Polya se transforma, como es lógico, en una distribución binomial.

$$P_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

cuyo límite, para $n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$, es decir, para probabilidad de siniestro pequeña, es la distribución de Poisson.

Para analizar con más profundidad la distribución de Polya-Eggenberger, se puede recurrir a su trabajo, que reseñamos a pie de página (1), o bien a los distintos trabajos que le han tratado con extensión, entre los que cabe citar los artículos de Guldberg (2) y de Chiaro (3), aparte de textos como los de Feller, Parzen, etc.

II.2.1.4.- DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA

La distribución binomial negativa puede ser definida de distintas formas, fundamentalmente de tres: (a) En el esquema de urnas de Bernoulli, como el número de pruebas a realizar hasta

- (1) Polya- Eggenberger, F.: Über die statistik verketteter Vorgänge. Zeitschrift angew. Math. Mech. n° 3. (1943).
- (2) Guldberg. S.: Sui momenti della legge di distribuzione del Pólya. Giornale dell'Instituto Italizano degli Attuari. Anno VI n° 4. Octubre, 1935- XIII
- (3) Chiaro, A. del: Sui momenti delle leggi di distribuzione del Pólya a piu variabili. Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari. Anno VII, n° 2. Abril, 1936-XIV

alcanzar un determinado número de éxitos; (b) Como límite de la distribución de Polya-Eggenberger, para el caso de sucesos raros y contagio débil; (c) Como distribución de Poisson compuesta, cuando el parámetro de la misma sigue una distribución gamma. Esto aparte de la definición del proceso de Polya como proceso estocástico de contagio positivo. De todas estas definiciones, las que mayor interés presentan desde el punto de vista actuarial son la (b) y la (c), fundamentalmente la primera de ellas. Así, si en la distribución de Polya-Eggenberger anteriormente definida, que tenía por función de cuantía:

$$P_r = P(\xi=r) = \frac{\binom{\frac{p}{\delta}+r-1}{r} \binom{\frac{q}{\delta}+s-1}{s}}{\binom{\frac{1}{\delta}+n-1}{n}} \quad \text{con } 0 \leq r \leq n$$

que nos expresa la probabilidad de que se produzcan r siniestros entre n expuestos al riesgo, establecemos las siguientes hipótesis de convergencia, probabilidad inicial de siniestro pequeña y contagio débil:

$$\begin{aligned} np &= m & n \rightarrow \infty & \text{(límite)} \\ n\delta &= \frac{1}{h} & p \rightarrow 0 & \text{(probabilidad inicial de siniestro pequeña)} \\ & & \delta \rightarrow 0 & \text{(contagio débil)} \end{aligned}$$

donde h es el parámetro de contagio ($h \rightarrow \infty \Leftrightarrow \delta \rightarrow 0$), que posteriormente, según la modelización (c), tendrá el significado de ser el coeficiente de heterogeneidad de la cartera. Pues bien, si tales hipótesis son asumidas, entonces, al pasar al límite en la distribución de Polya, surge la distribución binomial negativa, que tiene por función de cuantía:

$$P_r = P(\xi=r) = \binom{-mh}{r} \left(\frac{1}{1+h} \right)^r \left(\frac{h}{1+h} \right)^{mh}$$

Probabilidad de que se produzcan r siniestros, con independencia del número de expuestos al riesgo.

La función característica de esta distribución es:

$$\phi_{\xi}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{itr} P_r = \left(1 - \frac{1}{h} (e^{it} - 1) \right)^{-mh}$$

siendo sus parámetros fundamentales:

Media: $\alpha = m$

Varianza: $\sigma^2 = m \left(1 + \frac{1}{h}\right)$

Como se puede apreciar claramente, en la distribución binomial negativa, a diferencia de la distribución de Poisson, la varianza es mayor que la media (al ser $h > 0$), debido al efecto del contagio positivo. Sin embargo, tal contagio se interpreta como "débil", al afectar sólo a la varianza y no al valor medio. Esta es la definición de la distribución binomial negativa, de mayor interés desde el punto de vista actuarial. Sin embargo, a efectos de lograr una mayor comprensión, una comprensión de conjunto, de esta fundamental distribución, parece oportuno presentarla desde todos los puntos de vista posibles, es decir, según el esquema de tres puntos, (a), (b) y (c), que establecíamos al principio, y, en concreto, empezar por el punto (a), que es el que de una manera más intuitiva introduce la distribución. Este primer análisis, aparte de tener gran importancia en la teoría de colas, nos permite, entre otras cosas, justificar la terminología empleada (distribución "binomial negativa"), relacionar a la distribución binomial negativa con la distribución binomial, potenciando entonces el uso de las tablas de ésta, y, en definitiva, presentar a la distribución objeto de nuestro estudio según la forma en que ésta es normalmente definida en los manuales clásicos del cálculo de probabilidades, con el bagaje de conocimientos y propiedades que en éstos se desarrollan. Comencemos, por tanto, definiendo a la distribución binomial negativa dentro del esquema de urnas de Bernoulli.

(a) La distribución binomial negativa como distribución del número de pruebas en su fenómeno dicotómico.

La distribución binomial negativa es una generalización de la distribución geométrica o de Pascal. Recordemos en qué consiste esta distribución.

Sea un fenómeno dicotómico, correspondiente a un esquema de urna de Bernoulli con dos colores, A y \bar{A} (blanco y negro, por ejemplo). A la aparición del color A la conceptuaremos como

un "éxito" de la prueba, mientras que si aparece \bar{A} , diremos que en la prueba se ha producido un "fracaso". Si extraemos con reemplazamiento bolas de la urna, (independencia estocástica de los sucesivos sucesos), el fijar el número de extracciones a realizar, y analizar el número de éxitos obtenidos, supone, como es sabido, definir una distribución binomial. Pues bien, fijemos el número de éxitos a obtener (uno en el caso de la distribución geométrica, x cualquiera - entero - en el caso de la distribución binomial negativa) y analicemos entonces el número de pruebas o extracciones a realizar hasta alcanzar ese número de éxitos. Tratándose del mismo esquema de urna (extracciones con reemplazamiento de bola de una urna que las contiene de dos colores), la variable aleatoria considerada es diferente. En el caso de la distribución de Pascal, tendremos: Sea p la probabilidad de éxito en una prueba y $q = 1-p$ la de fracaso. La variable aleatoria considerada será el número de veces que hay que efectuar extracciones para que, por primera vez, se produzca un éxito. Por tanto, los posibles valores de dicha variable serán: 1, si en la primera prueba ya se produce éxito, 2 si se produce un fracaso inicial, seguido de un éxito... n , si se producen al principio $n-1$ fracasos, y, por primera vez, éxito en la prueba n -ésima. Es decir, si la variante considerada es ξ , $\xi=r$ sí y sólo si las $r-1$ primeras pruebas producen fracaso y en la r -ésima prueba se produce un éxito.

La función de cuantía de dicha distribución será entonces:

$$P(\xi=r) = q^{r-1} p \quad \text{con } r=1,2,\dots,n\dots$$

El nombre de la distribución queda justificado por la forma que presenta su función de cuantía, toda vez que los términos $q^{r-1}p$ definen una serie geométrica, que, por ser de razón menor que la unidad, es convergente. En efecto, se trata de una distribución de probabilidad puesto que

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(\xi=r) = \sum_{r=1}^{\infty} q^{r-1} p = p \sum_{r=1}^{\infty} q^{r-1} p \frac{1}{1-q} = 1$$

A veces se define a la distribución geométrica, en vez de por la variable ξ que hemos considerado, por la variante $\eta = \xi-1$, que tiene por función de cuantía:

$$P(\eta=r) = q^r p \quad \text{con } r = 1,2,\dots,n\dots$$

y en donde r expresa el número de fracasos que preceden al primer éxito.

Es de resaltar el hecho de que, aunque $\sum_{r=1}^{\infty} P(\xi=r) = 1$, no por ello $\bigcup_{r=1}^{\infty} (\xi=r)$ es un suceso seguro, en el sentido de que, a nivel teórico, podría concebirse que jamás se produzca éxito alguno. Sin embargo, éste es un supuesto meramente teórico, que sólo tendrá cabida en una distribución determinista, es decir, con $p=0$. La distribución geométrica sólo depende de un parámetro, p . Basta con que a p le imponamos la restricción $0 < p < 1$, para que el anterior supuesto teórico no se pueda producir.

La distribución geométrica tiene por media $E(\xi) = 1/p$ y por varianza $V(\xi) = q/p^2$, siendo su función característica:

$$P_{\xi}(t) = \frac{p e^{it}}{1 - q e^{it}}$$

$$\text{En efecto: } P_{\xi}(t) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{itr} q^{r-1} p = p e^{it} \sum_{r=1}^{\infty} (q e^{it})^{r-1} = p e^{it} (1 - q e^{it})^{-1}$$

Un muy reciente trabajo referido a productos de variantes distribuidas geométricamente y estocásticamente independientes entre sí es el de Prokasa Rao (1).

Pues bien, generalicemos el esquema anterior que definió a la distribución geométrica. Condieremos ahora, en la reiteración del experimento de Bernoulli, la variante que analiza el número de pruebas precisas, no para obtener el primer éxito (Pascal), sino el n-ésimo éxito, siendo n cualquier número natural. En concreto, enfoquemos el tema a través de la siguiente pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que, al repetir las pruebas, se produzcan r fracasos antes del éxito n -ésimo? Ello es equivalente a preguntarse por la probabilidad de que sean precisas $n+r$ pruebas para que se produzca el n -ésimo éxito, es decir, por la probabilidad de que se hayan producido $n-1$ éxitos en las $n+r-1$ primeras pruebas, seguido de un éxito en la prueba $n+r$. Como se

(1) Prokasa Rao, B.L.S.: On a Characterization of Geometric Distribution. Scandinavian Actuarial Journal, 1980. Pag. 139-140

apreciará, la variante es el número de pruebas preciso para que se produzca el n-ésimo éxito. Si hablamos del número de fracasos (r) que precede al n -ésimo éxito, e, incluso, tomamos a dicha variante como la de nuestra distribución, ello es debido a que la igualdad de coeficientes binomiales, como posteriormente se resaltarán, nos conduce a una expresión distinta (aunque equivalente) de la distribución binomial negativa, que está relacionada, como tendremos ocasión de ver, con otras formas de engendrar el modelo e incluso de interpretarlo como fenómeno de contagio, cosa del máximo interés desde el punto de vista actuarial.

Así pues, nos preguntamos por la probabilidad de que, al repetir las pruebas se produzcan r fracasos antes del éxito n -ésimo. Tal suceso será $\xi=r$, que expresa igualmente que el n -ésimo éxito se produce en la prueba $n+r$. La probabilidad de dicho suceso será:

$$P(\xi=r) = \left(\binom{n+r-1}{r} p^{n-1} q^r \right) p = \binom{n+r-1}{r} p^n q^r, \quad p+q = 1$$

para $r=0,1,\dots,n,\dots$. $r=0$ expresa que las n primeras pruebas son con éxito, $r=1$ indica que en las n primeras pruebas se produce un fracaso, produciéndose un éxito en la prueba $n+1$, etc.

Nuestro interés en presentar a la variante como el número de fracasos en lugar del número de pruebas se debía a la siguiente propiedad de los coeficientes binomiales:

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

lo que, unido al desarrollo en serie:

$$(1-q)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-q)^r$$

nos conduce a la siguiente demostración de que, efectivamente, estamos en presencia de una distribución de probabilidad:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} p^n q^r = p^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} q^r = p^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-q)^r = \frac{p^n}{(1-q)^n} = 1$$

y además a la siguiente expresión de la función de cuantía de la propia distribución (de gran interés, según sepondrá de mani-

fiesto posteriormente):

$$P(\xi=r) = \binom{n+r-1}{r} p^n q^r = \binom{-n}{r} p^n (-q)^r \quad r=0,1,2,\dots; n \geq 0$$

Queda, de paso, justificado el nombre de distribución binomial negativa para esta distribución: está formada por coeficientes binomiales negativos, resultado del desarrollo binomial de $p^n(1-q)^{-n}$

En el caso particular de que $n=1$ (primer éxito), se obtiene la distribución geométrica o de Pascal. La relación entre ambas distribuciones es más intensa. En efecto, se verifica que la distribución binomial negativa puede ser definida como engendrada por una suma de n variantes geométricas estocásticamente independientes. La prueba de este teorema se basa en la función característica, y la estableceremos una vez que hayamos obtenido ésta.

Tal como se ha definido, la distribución binomial negativa puede ser interpretada como la distribución que corresponde al tiempo de espera del éxito n -ésimo.

Las consideraciones que anteriormente se han hecho para la distribución geométrica respecto al carácter seguro del suceso \bar{U} ($\xi=r$), son plenamente válidas para el caso de la distribución binomial negativa.

La distribución binomial negativa viene caracterizada por dos parámetros: n (número de éxitos) y p (probabilidad de éxito), en el sentido de que, conociendo éstos, la distribución queda determinada.

Si comparamos la distribución binomial negativa y la distribución binomial puede observarse que en ambas distribuciones estamos interesados por el número de pruebas de Bernoulli. La distribución binomial negativa se presenta cuando prefijamos el número de éxitos a obtener y analizamos el número de pruebas de Bernoulli necesarias para alcanzarlos, mientras que en la distribución binomial se fija el número de pruebas y estamos interesados por el número de éxitos que se producen.

Esta observación nos permite obtener una relación entre ambas: Sea la variante binomial de parámetros n y p , $B(n,p)$, y deseamos conocer el número de éxitos r , y sea la variante binomial negativa, de parámetros r y p , $BN(t,p)$, y deseamos conocer el número de pruebas, n , que es tanto como decir fracasos, $n-r$. Es claro que se verifica:

$$P(\xi < r) = P(\eta > n)$$

pues si hay menos de r éxitos en las n primeras pruebas, se necesitarán más de n pruebas para alcanzar r éxitos. También es evidente que:

$$P(\xi \geq r) = P(\eta \leq n)$$

pues si hay menos de r éxitos en los n primeros ensayos, se precisa de no más de n pruebas para alcanzar el r -ésimo éxito. Estas fórmulas son de indudable interés práctico, pues hacen posible el empleo de las tablas de la distribución binomial para el trabajo, con la distribución binomial negativa.

Los parámetros fundamentales de esta distribución son:

Media: $E(\xi) = n(q/p)$

Varianza: $V(\xi) = n(q/p^2)$

Obsérvese que, como $0 < p \leq 1$ y $V(\xi) = E(\xi)/p$, es $V(\xi) \geq E(\xi)$, a diferencia de lo que sucede en la distribución de Poisson, donde media y varianza coinciden. Este mayor valor de la varianza respecto a la media se debe al efecto de contagio, característico de esta distribución, como ya hemos indicado y reiteramos posteriormente.

La función característica de la distribución binomial negativa resulta ser:

$$\phi_{\xi}(t) = \left(\frac{p}{1-q e^{it}} \right)^n$$

En efecto, tendremos:

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} e^{itr} P(\xi=r) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{itr} \binom{n+r-1}{r} (1-q)^n q^r = \\ &= (1-q)^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} (q e^{it})^r = (1-q)^n (1-q e^{it})^{-n} = \left(\frac{p}{1-q e^{it}} \right)^n \end{aligned}$$

Demostremos que la distribución binomial negativa es engendrada por una suma de n variantes geométricas estocásticamente independientes. Sea para ello la variante geométrica η que definimos anteriormente, como la variante del número de fracasos que preceden al primer éxito, es decir, con función de cuantía:

$$P(\eta=r) = q^r p \quad r=0,1,2,\dots,n,\dots \quad p+q=1$$

La función característica de dicha variante será:

$$\phi_{\eta}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{itr} P(\eta=r) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{itr} q^r p = p \sum_{r=0}^{\infty} (q e^{it})^r = \frac{p}{1-q e^{it}}$$

Pues bien, sean η_i , $i=1,2,\dots,n$, variantes geométricas estocásticamente independientes y $\xi = \sum_{i=1}^n \eta_i$. La función característica de ξ será:

$$\phi_{\xi}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{\eta_i}(t) = \{\phi_{\eta_i}(t)\}^n = \left(\frac{p}{1-q e^{it}}\right)^n$$

es decir, la distribución de ξ es binomial negativa con parámetros n y p , c.q.d..

Presentemos ahora, mediante sencillos cambios de variable, a la distribución binomial negativa según una expresión muy familiar a los actuarios. La función de cuantía de dicha distribución hemos visto que es:

$$P(\xi=r) = \binom{n+r-1}{r} p^n (-q)^r \quad \text{con } r=0,1,2,\dots \text{ y } p+q=1$$

Pues bien, hagamos los siguientes cambios de parámetros:

$$p = \frac{h}{1+h} \quad q = 1-p = \frac{1}{1+h} \quad \text{y } n = mh$$

Entonces la función de cuantía pasa a ser:

$$P(\xi=r/m, h) = \binom{-mh}{r} \left(-\frac{1}{1+h}\right)^r \left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh} \quad r=0,1,2,\dots$$

La función característica de la distribución será:

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} e^{itr} \binom{-mh}{r} \left(-\frac{1}{1+h}\right)^r \left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh} = \left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-mh}{r} \left(-\frac{1}{1+h}\right)^r e^{itr} \\ &= \left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh} \left(1 - \frac{e^{it}}{1+h}\right)^{-mh} = \left(1 - \frac{1}{h} (e^{it}-1)\right)^{-mh} \end{aligned}$$

A partir de esta distribución, se obtienen los siguientes parámetros fundamentales de la distribución:

$$\text{Media: } E(\xi) = m$$

$$\text{Varianza: } V(\xi) = m \left(1 + \frac{1}{h}\right)$$

que de nuevo, es expresiva del efecto de contagio, al ser $V(\xi) > E(\xi)$ por ser $h > 0$.

Si estamos trabajando en un periodo de observación $(0, t)$, no unitario, la función de cuantía pasa a ser:

$$P_n(t) = \binom{-mh}{n} \left(\frac{-t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}$$

y los momentos serán:

$$\text{Media: } E(\xi) = mt$$

$$\text{Varianza: } V(\xi) = mt \left(1 + \frac{t}{h}\right)$$

El significado del parámetro de contagio h es el de ser una medida del grado de homogeneidad. Cuanto menor sea el valor de h , tanto mayor será el grado de heterogeneidad de la clase o grupo asegurado. Cuando se trate de los seguros de una cartera, entonces h expresa el grado de heterogeneidad de la misma. Esa heterogeneidad está relacionada con la intensidad del contagio. Recordemos que, en la distribución de Polya, se establecía el cambio de parámetros: $n\delta = 1/h$, de tal forma que cuando $\delta \rightarrow 0$ (contagio nulo), $h \rightarrow \infty$. Por contra, para valores de h pequeños, el contagio es fuerte. Parece lógico pensar que si el esquema de Poisson es el de ausencia de contagio (con infinitos expuestos al riesgo) y el esquema de la binomial negativa es el de contagio, aunque moderado (con igualmente, infinitos expuestos al riesgo), en ausencia de contagio, es decir, cuando $h \rightarrow \infty$, la binomial negativa debe converger a una distribución de Poisson. Veamos que, efectivamente, ésto es lo que ocurre:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \phi_{\xi}(t) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{h} (e^{it} - 1) \right\}^{-mh} = \\ &= \exp \left\{ \lim_{h \rightarrow \infty} (-mh) \left(1 - \frac{1}{h} (e^{it} - 1) \right) \right\} = e^{m(e^{it} - 1)} \end{aligned}$$

que es la función característica de una distribución de Poisson con parámetro \underline{m} . Tal convergencia podría haberse planteado en términos de la función de cuantía de ambas distribuciones. En efecto, tendremos:

$$P(\xi=r) = \binom{n+r-1}{r} p^n q^r$$

Hagamos: $p = \frac{n}{n+\lambda}$ y $q = 1-p = \frac{\lambda}{n+\lambda}$ con $\lambda > 0$

Entonces:

$$\begin{aligned} P(\xi=r) &= \binom{n+r-1}{r} \left(\frac{n}{n+\lambda}\right)^n \left(\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)^r = \binom{n+r-1}{r} \left(\frac{1}{1+\lambda/n}\right)^n \left(\frac{\lambda}{(1+\lambda/n)}\right)^r \frac{1}{n^r} = \\ &= \frac{n^r \left(1+\frac{1}{n}\right) \left(1+\frac{2}{n}\right) \dots \left(1+\frac{r-1}{n}\right)}{r!} \cdot \frac{1}{(1+\lambda/n)^n} \cdot \frac{\lambda^r}{(1+\lambda/n)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} \end{aligned}$$

esto es la función de-cuantía de la distribución de Poisson de parámetro λ aparece como límite de la correspondiente a la distribución binomial negativa cuando $p=n/(n+\lambda)$ y $n \rightarrow \infty$.

En definitiva, se verifica la relación asintótica:

$$\binom{-mh}{r} \left(\frac{-1}{1+h}\right)^r \left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} e^{-m} \frac{m^r}{r!}$$

(b) La distribución binomial negativa como límite de la distribución de Polya.

La definición de la distribución binomial negativa como límite de la distribución de Polya-Eggenberger para el caso de sucesos raros (probabilidad de siniestro pequeña) y contagio débil ya la hemos efectuado anteriormente, pues la consideramos como la más significativa desde el punto de vista actuarial. La demostración del proceso de convergencia consiste simplemente en probar que, definidos los parámetros:

$$np = m ; \quad n\delta = 1/h$$

y dadas las convergencias: $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, se verifica:

$$\frac{\binom{\frac{p}{\delta}+r-1}{r} \binom{\frac{q}{\delta}+s-1}{s}}{\binom{\frac{1}{\delta}+n-1}{n}} \rightarrow \binom{-mh}{r} \left(-\frac{1}{1+h}\right)^r \left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh}$$

Una vez obtenida dicha función de cuantía como límite de la de Polya, la definición de sus elementos característicos (media, varianza, etc.) ya la hemos efectuado a lo largo del análisis realizado sobre esta distribución. Se trata, obviamente, de la misma distribución, aunque generada de distintas formas.

La distribución binomial negativa se utiliza mucho en la práctica, ya que se ajusta mejor que la distribución de Poisson a muchas distribuciones del número de siniestros. Ambas son consecuencia del paso al límite, cuando $n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$: Poisson de la binomial (sin contagio) y la binomial negativa de la de Polya (contagio positivo). Ambas expresarán la probabilidad del número de siniestros en infinitas exposiciones al riesgo.

Tomemos un ejemplo del texto de Nieto de Alba (1) sobre la distribución binomial negativa, que ponga de manifiesto la existencia de contagio, y nos permita relacionarlo con la característica de heterogeneidad. El ejemplo es el siguiente:

Se han observado 100 nuevas pólizas de seguros (por ejemplo, del ramo del automóvil) y se han obtenido las frecuencias que se indican en la siguiente tabla:

Número de siniestros	Número de pólizas
0	68
1	16
2	10
3	4
4	2
	100

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Introducción a la Estadística. Concepción Bayesiana. Tomo 2. Aguilar, 1973. Pag. 113-114

La media de esta distribución de frecuencias es $\bar{x} = 0,56$, siendo la varianza $s^2 = 0,93$. Puede observarse claramente el efecto de contagio, además de por la sustancial diferencia entre la media y la varianza, analizando directamente la distribución, puesto que se aprecia claramente que los siniestros reiterados, es decir, 1, 3, y 4 presentan mayor frecuencia que en el ejemplo que se propuso para la distribución de Poisson. La interpretación puede ser la siguiente: Quien tiene un siniestro queda en situación de tener otros o contribuye a aumentar el número de ellos. En este caso, es indudable que se ajustará mejor el modelo de la distribución binomial negativa. Si, siguiendo el principio de analogía, estimamos la media poblacional a través de la media muestral, \bar{x} y la varianza poblacional a través de la varianza muestral s^2 , resultará la siguiente estimación para el parámetro h :

$$0,93 = 0,56(1 + \frac{1}{h}), \text{ de donde: } h = \frac{0,56}{0,93 - 0,56} = 1,51$$

Este valor de h tan reducido hace que el efecto de contagio sea grande. Este hecho puede ser también expresado diciendo que hay una gran heterogeneidad en el riesgo. En efecto, consideremos un grupo de n riesgos; al número de ellos con n siniestros lo representaremos por n_r , tal que $n = n_0 + n_1 + \dots + n_n + \dots$. La probabilidad de que, en un periodo determinado, un riesgo (por ejemplo, un automóvil) tenga r siniestros vendrá dado por una distribución de Poisson con media y varianza λ . Si este parámetro λ varía entre los distintos subgrupos, entonces podemos traducir esa heterogeneidad considerando a λ como una variable aleatoria con una determinada distribución de probabilidad. Pues bien, si tal distribución es la gamma, entonces la distribución del número total de siniestros sigue una distribución binomial negativa.

A través de este ejemplo y el consiguiente análisis sobre la heterogeneidad de riesgos nos hemos introducido en la tercera forma de definición de la distribución binomial negativa, que consiste en definirla como una distribución de Poisson compuesta. Se cierra con ésta (al margen de los procesos estocásticos) la gama de posibilidades de definición de esta importante distribu-

ción. Por ser esta forma de definición especialmente relevante en el campo actuarial, y a expensas de ampliar el estudio cuando se analice la distribución de Poisson compuesta, analicemos con una cierta detención esta tercera modelización.

(c) La distribución binomial negativa como distribución de Poisson compuesta.

Aunque tendremos ocasión de hablar de ella al analizar las distribuciones básicas de las cuantías de los siniestros, recordemos brevemente como se define la ley gamma de probabilidad. En su acepción más general, diremos que una variante ξ sigue una distribución gamma cuando, siendo continua, tiene por función de densidad:

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-\gamma}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

siendo α y β parámetros positivos y γ un parámetro no negativo, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, y siendo $x > \gamma$. $\Gamma(\alpha)$ es, como es bien sabido, la integral euleriana de segunda especie,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

y tiene el significado de ser el origen respecto al cual referimos los valores de la variante. Pues bien, hagamos $\gamma=0$. Llamando $1/\beta=h$, obtenemos la expresión más utilizada de la función de densidad de la distribución gamma:

$$f(x; h, \alpha) = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-hx} \quad \text{para } x > 0$$

$$f(x; h, \alpha) = 0 \quad \text{para } x \leq 0$$

siendo $h > 0$ y $\alpha > 0$.

Esta distribución es del tipo III de Pearson. Cuando, en la distribución de la cuantía de un siniestro, analicemos la distribución gamma, estudiaremos brevemente la ecuación diferencial de Pearson y cómo la ley gamma pertenece al tipo de soluciones clasificadas en el apartado III. Basta decir que Cramér define la solución general del tipo III como la familia de curvas:

$$y = A(x-\mu)^{\lambda-1} e^{-\alpha(x-\mu)} \quad \text{con } x > \mu, \alpha > 0 \text{ y } \lambda > 0$$

y, evidentemente, la función de densidad de la distribución gamma pertenece a dicha familia, con $A=h^\alpha/\Gamma(\alpha)$, $\mu=0$, $\lambda=\alpha$. Por tanto, al trabajar con la distribución gamma, trabajamos con una distribución tipo III de Pearson.

Pues bien, analicemos la distribución binomial negativa como una distribución de Poisson compuesta:

Sea la variante ξ que sigue una ley de Poisson de parámetro

$$P_n = P(\xi=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

y supongamos que λ es un parámetro aleatorio, que sigue una ley gamma, es decir, con función de densidad:

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-h\lambda} & \text{para } \lambda > 0 \\ 0 & \text{para } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

en donde $\alpha > 0$ y $h > 0$.

Se define entonces la distribución de Poisson compuesta:

$$\begin{aligned} P_n &= P(\xi=n) = \int_0^\infty P(\xi=n/\lambda) f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-h\lambda} d\lambda = \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha) n!} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda(1+h)} d\lambda = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha) n!} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(1+h)^{n+\alpha}} = \\ &= \left(\frac{h}{1+h}\right)^n \frac{1}{(1+h)} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} \end{aligned}$$

y, conviniendo en poner, para x cualquiera y n natural:

$$\begin{aligned} \binom{x}{n} &= \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}, \text{ nos resulta:} \\ \binom{-\alpha}{n} &= \frac{\alpha(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} \end{aligned}$$

luego, en definitiva, resulta:

$$P_n = P(\xi=n) = \binom{-\alpha}{n} \left(\frac{h}{1+h}\right)^n \left(\frac{1}{1+h}\right)$$

que es la función de cuantía de la distribución binomial negativa.

Basta en ella poner $\alpha=nh$, para obtener la conocida expresión de la función de cuantía:

$$P_n = P(\xi=n) = \binom{n}{n} \left(-\frac{1}{1+h} \right)^n \left(\frac{1}{1+h} \right)^{nh}$$

En un interesante artículo, Carlson (1) se pregunta sobre el porqué de la utilización de una distribución Tipo III de Pearson al definir la distribución de Poisson compuesta. Como indica Carlson, "el caso más frecuente, y con el que estamos familiarizados, proviene de la hipótesis de variabilidad en la esperanza de accidente de individuo a individuo en una población estadística, siguiendo tal variabilidad una distribución de Pearson Tipo III, pero con distribución para cada valor de la esperanza de accidente, determinada por la ley de Poisson. En estas condiciones es natural preguntarse: ¿Porqué la ley de Pearson Tipo III?," La respuesta dada por Dropkin (2) es triple:

- (a) es una distribución asimétrica.
- (b) conduce a ecuaciones convenientemente "simples", y
- (c) existen tablas (de la Función Gamma Incompleta) que simplifican los cálculos.

Podíamos añadir nosotros una cuarta consideración:

- (d) da mejores resultados que su fórmula predecesora, la distribución de Poisson.

La simetría de la fórmula de Pearson Tipo II está en consonancia con nuestro intuitivo conocimiento de la propensión al accidente en los individuos. Respecto a la simplicidad de las ecuaciones resultantes, ello es debido, en gran medida, al hecho de que el número de parámetros sea solamente dos, lo que no ocurre en las formas no degeneradas de Pearson; por ello, podría-

(1) Carlson, Thomas O.: Negative Binomial rationale. Proceedings of the Casualty Actuarial Society nº 49. 1959. Pag. 177-183

(2) Dropkin, L.B.: Some considerations on automobile rating systems utilizing individual driving records. Proceedings of the Casualty Actuarial Society nº 46. 1959. Pag. 165-176

Discusión al artículo por R.A. Bailey, R.C.A.S. nº 47, 1960. Pag. 52

mos añadir una quinta razón a nuestro análisis, que puede ser considerada como una subrazón parcialmente apuntada por la anterior (b), a saber:

(e) el número total de parámetros se reduce a dos.

Pero todas estas consideraciones sobre la racionalidad de la utilización de la distribución de Pearson Tipo III, descansan sobre una base meramente empírica. Nuestra curiosidad continúa insatisfecha. Permítasenos entonces volver sobre otras derivaciones de la fórmula final. Simon menciona un número de derivaciones que se producirían en el caso de no asumir la hipótesis de una distribución de Pearson Tipo III. El histórico trabajo de Yule en 1910 desarrolla, siguiendo a Simon, "la distribución del número de siniestros mortales que se podrían producir durante la n -ésima exposición a la enfermedad, en exceso de las r exposiciones, donde r es el número mínimo que puede resultar fatal, y los efectos de las sucesivas exposiciones a la enfermedad actuando acumulativamente". En términos de accidentes, se podría expresar de la siguiente forma: la distribución del número de accidentes producidos durante la n -ésima exposición al accidente, en exceso de r exposiciones, donde r es el número mínimo de exposiciones que puede producir un accidente, y las sucesivas exposiciones al accidente actúan acumulativamente. Es decir, la probabilidad de que sean precisas $n+r$ exposiciones al accidente para que se produzca el acaecimiento de n accidentes". Tal es, claramente, el modelo de la distribución binomial negativa. Como vemos, Carlson relaciona las dos formas fundamentales de definir la distribución binomial negativa, de las que hemos venido tratando en este trabajo. El artículo de Carlson trata numerosos aspectos de la distribución binomial negativa, de gran interés desde el punto de vista actuarial.

Antecedentes históricos de la distribución binomial negativa

La distribución binomial negativa fué introducida por Greenwood y Yule para modelizar la distribución del número de accidentes de trabajo. Se puede decir que la probabilidad de n accidentes sigue una distribución de Poisson de parámetro λ ; pero este

parámetro varía de unos trabajadores a otros, y por otras causas también, habiéndose observado que, si se admite que se distribuye como una gamma, se obtiene un buen ajuste de las observaciones a la correspondiente distribución de Poisson compuesta.

Como dice Prieto Pérez (1), "históricamente fueron Greenwood y Yule los que presentaron, por vez primera (1920), un interesante estudio encaminado a la elaboración de un modelo matemático que describiera los problemas psicológicos y sociológicos que lleva aparejado el fenómeno de la propensión al accidente. Evidentemente, si personas distintas, presentaran diferentes propensiones al accidente, sería conveniente detectarla y cambiarla. Examinaron Yule y Greenwood la distribución del número de accidentes sufridos por los operarios de una fábrica de proyectiles, y vieron que, como es sabido, se caracterizan por los siguientes parámetros:

(a) Distribución binomial: Media: $m_1=np$; Varianza: $\sigma_1^2=npq$.

(b) Distribución de Poisson. " : $m_2=np$; " : $\sigma_1^2=np$.

Teniendo en cuenta que $q < 1$ siempre, se verifica: $\sigma_2^2 m_1 = m_2 = \sigma_2^2$. Los datos disponibles sugerían, por el contrario, un modelo de distribución que satisficiera la desigualdad $m < \sigma^2$. Precisamente, la distribución binomial negativa cumple esta propiedad. A este modelo, como ya hemos señalado, llegaron Greenwood y Yule, suponiendo que la población considerada estaba compuesta por individuos con diferentes grados de propensión al accidente, representados por diferentes valores de λ , y siempre que λ se distribuya siguiendo un modelo de distribución de Pearson -Tipo III.

(1) Prieto Pérez, Eugenio: Aplicaciones al seguro de la distribución binomial negativa. Estadística Española, nº 40. Julio-Septiembre 1968. Pag. 85-56. Anales del Instituto de Actuarios Españoles. nº 13. 1972. Pag. 27-44

Como dice Simon (1), "Greenwood y Yule (2) presentaron el trabajo clásico que desarrolla la teoría en un modelo matemático y lo contrastaron con los datos de accidentes disponibles. Este trabajo es un clásico, y punto de referencia de múltiples autores. Por ejemplo, Kendall y Stuart resumen con acierto este trabajo y dan los datos usados por Greenwood y Yule.

Durante los siguientes años, un considerable número de autores siguieron la pauta marcada en 1920 por este trabajo, y utilizaron sus modelos en la descripción del fenómeno de los accidentes.

El primer trabajo en la literatura actuarial relativo a la distribución binomial negativa fué el de Keffer (3) en 1929, en relación con un plan de tarificación a posteriori ("experience rating") de un seguro colectivo de vida. Keffer desarrolló la teoría en relación con la relativa dispersión de los índices de siniestralidad respecto a la verdadera media. En respuesta a la discusión escrita que siguió a la presentación del trabajo, desarrolló las ecuaciones para la media y la varianza y comentó el hecho de que la varianza excedía el valor correspondiente en la distribución de Poisson de una forma que interpretó que era indicativa de la heterogeneidad de los datos".

-
- (1) Simon, Le Roy J.: An Introduction to the Negative Binomial distribution and its applications. Proceedings of the Casualty Actuarial Society nº 91. Vol. XLIX, Part. I. 1962. Pag. 1-11
- (2) Greenwood, M.- Yule, G. Udny.: An inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings with particular reference to the occurrence of multiples attacks of disease or of repeated accidents. Journal of the Royal Statistical Society. nº 83. 1920. Pag. 255-279
- (3) Keffer, R.: An experience rating formula. Transactions of the Actuarial Society of America, nº 30. 1929. Pag. 130-139. Discusión: Pag. 593-611

Trabajos sobre la distribución binomial negativa

Un interesante trabajo sobre la distribución binomial negativa es el de Simon, titulado "An Introduction to the Negative Binomial distribution and its applications" (1)

En él, el autor presenta una bibliografía sobre el tema seleccionada entre los cientos de artículos y textos que lo han tratado, y cuidadosamente ordenada en cinco grandes apartados: Los artículos fundamentales, primeros orígenes, aplicaciones, modelos y temas avanzados. La selecta bibliografía, incluida en el apéndice A del artículo, constituye una completa fuente de información para todo investigador en la materia.

Como señala Simon, "si sólo se pudiera leer un artículo, tal debería ser el de Arbous y Kerrick". En efecto, dicho artículo supone una excelente introducción al tema. En la primera parte, Arbous y Kerrick (2) describen con acierto en términos no matemáticos, el concepto de "propensión al accidente" ("Accident proneness"), diferenciándolo del de "riesgo de accidente" o "exposición al accidente" ("Accident liability"). La "propensión al accidente" es un atributo del individuo que no varía ni tiende a incrementarse o disminuir a lo largo de un prolongado periodo de tiempo. Por el contrario, el "riesgo de accidente" incluye la propensión al accidente más los efectos de la edad, experiencia, fatiga, estado emocional, salud, etc. En la sección matemática del artículo, se desarrolla y discute la distribución binomial negativa desde dos puntos de vista. Uno, en el que define a la distribución binomial negativa como distribución de Poisson compuesta. Otro método, consistente en suponer que todo individuo comienza con la misma propensión al accidente, propensión

(1) Simon, Le Roy J.: Artículo citado.

(2) Arbous, A.G.- Kerrick, J.E.: Accident statistics and the concept of accident - proneness. Part. I: A critical evaluation. Part. II: The Mathematical background. Biometrics. n° 7. 1951. Pag. 340-429.

que permanece constante hasta que el accidente se produce. Entonces, al producirse el accidente, la probabilidad de futuro accidente para el individuo cambia. Este desarrollo también conduce a una distribución binomial negativa. El trabajo finaliza con una breve discusión sobre la distribución binomial bivariante y su relación con la propensión al accidente.

Kendall y Stuart (1), por su parte, han desarrollado la distribución binomial negativa en dos caminos. El método más interesante consiste en la discusión del muestreo secuencial cuando el objetivo es continuar el muestreo hasta que se haya producido un cierto número de sucesos. El número de repeticiones del fenómeno (consultas en el muestreo) seguirá entonces una distribución binomial negativa.

Dentro del campo actuarial, Bischel (2) define la distribución binomial negativa a partir de los modelos de Poisson y Pearson Tipo III, es decir, como distribución de Poisson compuesta. Los datos actuariales del trabajo son de especial interés, estando basado en los accidentes de automóviles ocurridos a los vehículos asegurados en una compañía suiza.

Otros trabajos de interés son los de Dropkin (3), y, en especial, el de Simon (4).

(1) Kendall, M.G.- Stuart, A.: The advanced theory of Statistics. Vol. I. New York: Hafner Publishing. Co. 1959. Pag. 129-225

(2) Bischel, F.: Une méthode pour calculer une ristourne adéquate pour années sans sinistres. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. III. Abril 1960. Pag. 106-112

(3) Dropkin, L.B.: Some considerations on automobile rating systems utilizing individual driving records. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. n° 46. 1959. Pag. 165-176

Discusión al artículo por R.A. Bailey, P.C.A.S. n° 47, 1960. Pag. 52-56

(4) Simon, Le Roy J.: Negative Binomial and Poisson distributions compared. Proceedings of the Casualty Actuarial Society n° 47. 1960. Pag. 20-40

Respecto al problema de la estimación de parámetros por máxima verosimilitud en una población binomial negativa, debemos mencionar los trabajos de Anscombe (1) y de Simonsen (2).

Para establecer dicha estimación, Anscombe se plantea el problema de resolver la ecuación

$$\sum_{s=1}^k \frac{N_s}{N_0} (x+s-1)^{-1} - \log \left(1 + \frac{m}{x}\right) = 0 \quad (x > 0)$$

con respecto a x , donde "log" expresa logaritmos naturales y N_s (donde $N_k > 0$ y $N_s = 0$ para $s > k$) expresa el número de elementos $\geq s$ en una muestra aleatoria procedente de una población con distribución binomial negativa.

$$\binom{\delta+j-1}{j} \theta^j (1-\theta)^\delta \quad (j=0,1,2,\dots)$$

\bar{m} es la media muestral: $m = \frac{1}{N_0} \sum_{s=1}^k N_s$

Si $m^2 < 2S$, donde $S = \frac{1}{N_0} \sum_{s=1}^k N_s(s-1)$, se demuestra que si $k \geq 2$, la

ecuación presenta al menos una raíz. Anscombe ha demostrado que la ecuación carece de solución si $m^2 > 2S$, y que tiene solución única si $k \geq 2$ y $m^2 < 2S$. En este último caso, x es el estimador por máxima verosimilitud $\hat{\delta}$ del parámetro δ . Simonsen, por su parte, ha demostrado que la ecuación carece de solución si $k=1$, así como si $k \geq 2$ y $m^2 \geq 2S$, presentando solución única si $k \geq 2$ y $m^2 < 2S$, como ya demostró Anscombe.

(1) Anscombe, F.J.: Sampling theory of the negative binomial and logarithmic series distributions. *Biometrika* n° 37. 1950. Pag. 358-382

(2) Simonsen, W.: On the Solution of a Maximum-Likelihood Equation of the Negative Binomial Distribution. *Scandinavian Actuarial Journal*. 1976. n° 4. Pag. 220-231

Por último, es de reseñar el mencionado artículo de Prieto Pérez (1). En él, el autor analiza detalladamente la distribución que nos ocupa desde el punto de vista de las aplicaciones actuariales, estudiando las distintas formas de generación del modelo, fundamentalmente las siguientes:

- a/ Distribución compuesta de Poisson, cuando el parámetro sigue una distribución de Pearson del Tipo III
- b/ Como un proceso de Polya.
- c/ Según el método del muestreo sucesional de M.C. Kendall y A. Stuart.

Dicho artículo se completa con la prueba de que se verifican las condiciones de Dubourdien y la discusión del ajuste del modelo por los métodos de Pearson y máxima verosimilitud.

Aplicaciones de la distribución binomial negativa

Existen numerosas aplicaciones de la distribución binomial negativa en la literatura científica. Simon destaca el trabajo de Bliss (2), en el que este autor presenta 22 distribuciones de frecuencias de datos biológicos y a los que ajusta distribuciones binomiales negativas. El artículo es excelente por múltiples conceptos, además de por los datos presentados. En primer lugar, de una clara exposición del modelo utilizando la distribución binomial (positiva) como punto de partida. A continuación, presenta tres métodos para el ajuste de la curva: (a) utilizando el método de los momentos, y la media y varianza de los datos observados; (b) utilizando un método sumamente fiable basado en la media y el número de casos nulos; (c) utilizando el

(1) Prieto Pérez, Eugenio: Artículo citado.

(2) Bliss, C.I.: Fitting the Negative Binomial distribution to biological data. Biometrics nº 9. 1953. Pag. 176-200

método de la máxima verosimilitud. El artículo incluye la discusión de dos métodos para el contraste de la bondad del ajuste: (1) el usual de la χ^2 de Pearson, y (2) un contraste del tercer momento de la muestra comparada con el valor estimado a partir de los dos primeros momentos. Esto es de particular interés cuando la cola de la curva es bastante corta, cosa que frecuentemente ocurre en los datos referidos a variables de seguros. Finalmente se ilustra un infrecuente método de desarrollo de la distribución binomial negativa, en el cual el número de colonias de bacterias por superficie microscópica sigue la distribución de Poisson en repetidas muestras, mientras que el número de bacterias por colonia sigue una distribución logarítmica. En conjunto, el número de bacterias por superficie sigue una distribución binomial negativa.

Otra aplicación no actuarial es la de Wise (1) referida a un problema de control de calidad.

Finalmente, las aplicaciones actuariales de la distribución binomial negativa son innumerables, destacando las de Hakkinen, Delaporte, Thyron, Beard, etc. Simon (2), por ejemplo, discute el problema de las distribuciones truncadas. En el mundo del seguro, este caso se puede producir cuando no se dispone de la distribución del número de pólizas no siniestradas, pero sí puede ser obtenida la de las pólizas siniestradas. El trabajo, así mismo, analiza el método de la máxima verosimilitud en el ajuste a distribuciones binomiales negativas. Es, así mismo, destacable

(1) Wise, M.H.: The use of the Negative Binomial distribution in an industrial sampling problem. Supplement to Journal of the Royal Statistical Society nº8. 1946. Pag. 202-211

(2) Simon, Le Roy J.: Fitting Negative Binomial distributions by the method of maximum likelihood. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, nº48. 1961. Pag. 45-53

la obra de Lundberg (1), por el rigor de sus planteamientos estadístico-matemáticos. Un artículo de especial interés es el de Mintz (2). En él, el autor analiza el tiempo transcurrido entre dos accidentes consecutivos. Su propósito es el de ver si hay motivos para pensar en si el intervalo de tiempo transcurrido entre dos accidentes consecutivos decrece con el acaecimiento de cada accidente. Por el contrario, si el intervalo temporal tendiera a incrementarse, la tendencia al accidente decrecería a lo largo de los sucesivos accidentes. Las conclusiones a que le conducen sus datos pueden resumirse en el sentido de que no sucede ni lo uno ni lo otro, sino bien al contrario, la propensión al accidente por parte de los individuos permanece relativamente constante. El estudio se basó en la experiencia de un año con datos de conductores de taxis.

Hemos recogido, a lo largo de las anteriores líneas, unas pocas de las cuantiosas aportaciones que al campo actuarial y no actuarial se pueden producir a través de la distribución binomial negativa.

II.2.1.5.- DISTRIBUCION DE POLYA GENERALIZADA

Una generalización del esquema de la urna de Polya se puede establecer de la siguiente forma: Una urna contiene inicialmente N bolas, de las que a son de color blanco y $b=N-a$ de color negro. Cuando de la urna se extrae una bola blanca, se devuelve a la misma, junto con la bola extraída, a_1 bolas blancas y b_1 bolas negras. Si la bola extraída es negra, se devuelven a la urna, junto con la bola extraída, a_2 bolas blancas y b_2 bolas negras.

(1) Lundberg, O.: On random processes and their application to sickness and accident statistics. Uppsala, 1940.

(2) Mintz, A.: A methodological note on time intervals between consecutive accidents. Journal of Applied Psychology. nº 40, 1956. Pag. 189-191.

De esta forma, se define un modelo de urna absolutamente general, aunque de difícil tratamiento matemático.

En este esquema generalizado de urna, nos interesa, como siempre, determinar la distribución de probabilidad del número de bolas blancas extraídas en n extracciones. Representaremos a la correspondiente variante por η_n . La función de cuantía buscada será: $P_r = P(\eta_n=r)$, probabilidad de que, en n extracciones, se obtengan r bolas blancas y $n-r$ bolas negras. Tal distribución puede ser analizada a través de dos variables aleatorias:

ξ_n , correspondiente al fenómeno aleatorio de la n -ésima extracción, de tal forma que $\xi_n=0$ si en la n -ésima extracción sale bola negra y $\xi_n=1$ si en la n -ésima extracción sale bola blanca. Como es evidente se verifica:

$$\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

x_n , correspondiente al número de bolas blancas existentes en la urna una vez efectuadas n extracciones de la misma ($x_0=a$).

Veamos como el conocimiento de la distribución de esta última variante, x_n comporta el de la distribución buscada. En efecto, se verificará la siguiente relación:

$$x_{s+1} = x_s + (a_1 - a_2) \xi_{s+1} + a_2 \quad \text{para } s=0,1,2,\dots$$

puesto que, si en la $s+1$ extracción se obtiene bola negra,

$$x_{s+1} = x_s + a_2, \text{ y si sale bola blanca: } x_{s+1} = x_s + (a_1 - a_2) + a_2 = x_s + a_1.$$

Por inducción, obtendremos la siguiente relación general:

$$\text{Para } s=0: \quad x_1 = x_0 + (a_1 - a_2) \xi_1 + a_2 = a + (a_1 - a_2) \xi_1 + a_2$$

$$\text{Para } s=1: \quad x_2 = x_1 + (a_1 - a_2) \xi_2 + a_2 = a + (a_1 - a_2)(\xi_1 + \xi_2) + 2a_2$$

.....

$$\text{Para } s=n: \quad x_n = a + (a_1 - a_2) \sum_{i=1}^n \xi_i + na_2 = a + (a_1 - a_2) \eta_n + na_2$$

Por tanto, las variantes x_n y η_n se encuentran relacionadas a través de la anterior relación, o bien, despejando en ella:

$$\eta_n = \frac{x_n - a - na_2}{a_1 - a_2}$$

El conocimiento, por tanto, de la distribución de x_n implicará el de la distribución de η_n . En concreto, si por $g_n(z)$ representamos a la función generatriz de x_n y $G_n(z)$ es la función generatriz de η_n , se verificará:

$$G_n(z) = E(e^{z\eta_n}) = E\left(e^{z \frac{x_n - a - na_2}{a_1 - a_2}}\right) = e^{-z \frac{a + na_2}{a_1 - a_2}} g_n\left(\frac{z}{a_1 - a_2}\right)$$

Si, haciendo $Z = e^z$, representamos a la funciones generatrices por:

$$G_n(z) = E(Z^{\eta_n}) \quad \text{y} \quad g_n(z) = E(Z^{x_n}),$$

tendremos:

$$\begin{aligned} G_n(z) &= E(Z^{\eta_n}) = E\left(Z^{\frac{x_n - a - na_2}{a_1 - a_2}}\right) = Z^{-\frac{a + na_2}{a_1 - a_2}} E\left(Z^{\frac{x_n}{a_1 - a_2}}\right) = \\ &= Z^{-\frac{a + na_2}{a_1 - a_2}} g_n\left(Z^{\frac{1}{a_1 - a_2}}\right) \end{aligned}$$

Casos particulares de interés de esta distribución son los siguientes:

- (a) La distribución de Polya-Eggenberger surge como un caso particular de esta distribución, sin más que hacer: $b_1 = a_2 = 0$ y $a_1 = b_2 = c$.
- (b) El muestreo con reemplazamiento surge al hacer: $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, es decir, la hipótesis de Bernoulli es un caso particular de este esquema de urna.
- (c) El muestreo sin reemplazamiento surge al hacer: $b_1 = a_2 = 0$, $a_1 = b_2 = -1$. Resulta entonces que la distribución hipergeométrica se encuentra recogida como caso particular en este esquema general de urna.
- (d) Un fortalecimiento del efecto de contagio, respecto al modelo de Polya, surge al hacer: $a_2 = b_2 = 0$, $b_1 = a_1$, en cuyo caso, al extraer bola blanca, se introducen, junto con ella, a_1 bolas del mismo color, que vienen a sustituir a igual número de bolas negras. Sin embargo, si se extrae una bola negra, no se introduce modificación alguna en el esquema de urna, pues nos

limitamos a devolver la bola extraída. De esta forma, no se produce contagio alguno al producirse el suceso bola negra (ausencia de siniestro) y sí un contagio de doble dimensión respecto al esquema de Polya en el caso de bola blanca (siniestro). En esta distribución, de interés en algunos casos de intenso contagio, interesa conocer su distribución asintótica, por la misma razón que interesaba pasar al límite en los casos de la distribución binomial o en la de Polya. Pasando al límite, cuando el número de pruebas se hace grande, $n \rightarrow \infty$, se obtiene la siguiente distribución:

$$P_r = \binom{mh+r-1}{r} e^{-m} (1-e^{-1/h})^r$$

Esta nueva distribución binomial, negativa, que podríamos llamar distribución binomial negativa generalizada, tiene por parámetros:

$$\text{Media: } \mu = mh (e^{1/h} - 1)$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = mh (e^{1/h} - 1) e^{1/h}$$

Como se aprecia, a diferencia de la distribución binomial negativa, donde el parámetro de contagio afectaba a la varianza, pero no a la media, en este caso dicho parámetro afecta no sólo a la varianza sino también a la media. Así mismo, se aprecia que la varianza tiene un valor superior a la media, $\sigma^2 > \mu$ para $h \rightarrow \infty$ (ausencia de contagio), la media y la varianza tienden a m (modelo de Poisson).

- (e) Si hacemos $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = c$, obtenemos el modelo inverso al de Polya (contagio negativo). Es el caso que Friedman denomina "Modelo de una campaña de seguridad", en el que, después de un accidente, se toman medidas de represión y se produce con ello una disminución del número de accidentes.
- (f) Por último, tenemos el llamado "Modelo de Ehrenfest", en el cual $a_1 = b_2 = -1$ y $a_2 = b_1 = 1$. Este modelo se aplica en la física para analizar el intercambio de valor entre cuerpos aislados.

II.2.1.6.- DISTRIBUCION DE POISSON COMPUESTA

Muchas de las distribuciones de contagio resultan ser casos particulares de la distribución de Poisson compuesta. La noción de distribución compuesta ha sido formulada por Feller (1).

Feller define una sucesión $\{X_k\}$ de variables aleatorias con valores enteros, mutuamente independientes y con la misma distribución $P\{X_k=j\} = f_j$, con función generatriz $f(s) = \sum f_j s^j$, para, a continuación, establecer la suma aleatoria: $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ donde N el número N de términos es una variable aleatoria independiente de las x_j . Sea $P(N=n) = g_n$ la distribución del número aleatorio de variantes, N , con función generatriz $g(s) = \sum g_n s^n$. Para la distribución $\{h_j\}$ de S_N se puede aplicar la fórmula fundamental de las probabilidades condicionadas, que da lugar a la expresión:

$$h_j = P(S_N=j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) p\left(\sum_{i=1}^n X_i=j\right)$$

Pues bien, se demuestra en el texto que comentamos que la función generatriz de la suma aleatoria $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ es la función compuesta $h(s) = g(f(s))$, con f y g las funciones generatrices anteriormente definidas, para pasar a analizar dos casos particulares de interés:

- (a) Si las X_i son variantes de Bernoulli con $P(X_i=1) = p$ y $P(X_i=0) = q$, es decir, variantes dicotómicas, entonces $f(s) = q+ps$ y, por lo tanto, $h(s) = g(q+ps)$.
- (b) Si N , el número de variantes sumandos, tiene una distribución de Poisson con media t , entonces $h(s) = e^{-t+tf(s)}$, y a la distribución cuya función generatriz es esta $h(s)$ se la denomina distribución de Poisson compuesta. En particular, si las X_i son variables de Bernoulli, es decir, dicotómicas, y N presenta una distribución de Poisson con media t , entonces la función generatriz es $h(s) = e^{-tp+tps} = e^{tp(s-1)}$, por lo que se trata de una distribución de Poisson (simple) con media tp .

(1) Feller, William: Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones. Volumen I. Limusa-Wiley, 1973. Pag. 293-298

Si la distribución de N es de Poisson con media λt , la distribución de Poisson compuesta será:

$$\{h_i\}_t = P(S_N=h_i) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \{f_i\}^{n*}$$

con $\{f_i\}$ distribución de $X_i (i=1,2,\dots)$ y $\{f_i\}^{n*}$ convolución n -ésima de dicha variante. La función generatriz correspondiente será:

$$h_t(s) = e^{-\lambda t + \lambda t f(s)}$$

Feller define a las funciones generatrices infinitamente divisibles de la siguiente forma: Una función generatriz de probabilidades, h , es infinitamente divisible si para todo entero positivo n , la n -ésima raíz ${}^n\sqrt{h}$ es, así mismo, una función generatriz de probabilidades, y demuestra que las únicas funciones generatrices de probabilidades infinitamente divisibles son las que presentan la forma $h_t(s) = e^{-\lambda t + \lambda t f(s)}$, son características de las distribuciones de Poisson compuestas. Una consecuencia de ello es que, en general, si la distribución de N es infinitamente divisible, también lo es la distribución de la suma aleatoria S_N . Un teorema establece que una familia de funciones generatrices infinitamente divisibles se puede producir en términos de la condición: $h_{t+\tau}(s) = h_t(s)h_\tau(s)$. Una consecuencia inmediata de esta definición alternativa de divisibilidad infinita en distribuciones es que la distribución binomial negativa, cuya función generatriz es:

$$h_t(s) = \left(\frac{p}{1-qs} \right)^t \quad \text{con } p+q=1$$

verifica la propiedad enunciada: $h_{t+\tau}(s) = h_t(s)h_\tau(s)$ y, por tanto, la distribución binomial negativa es infinitamente divisible. Ahora bien, si lo es, es que es del Tipo Poisson compuesta. ¿Lo es? En efecto, sin más que hacer:

$$f_n = q^n/\lambda n, \quad \lambda = \log p^{-1}$$

A $\{f_n\}$ se la denomina distribución logarítmica.

Feller trata de las factorizaciones de funciones generatrices infinitamente divisibles en dos o más funciones generatrices, de las cuales sólo una es infinitamente divisible. Y en este sen-

tido trata de una notable propiedad de la distribución de Poisson compuesta, interesante a nuestros efectos. Se trata de que si ponemos $\lambda_i = \lambda f_i$, con f_i la conocida función de probabilidad de las variantes X_i sumandos, la función generatriz h_t de la distribución de Poisson compuesta admite una factorización de la siguiente forma:

$$h_t(s) = e^{\lambda_1 t(S-1)} e^{\lambda_2 t(S^2-1)} e^{\lambda_3 t(S^3-1)} \dots$$

El producto puede ser infinito, pero a nosotros sólo nos va a interesar el caso en que sólo un número finito de los λ_i sean positivos. El primer factor del producto es la función generatriz de una distribución de Poisson ordinaria con media $\lambda_1 t$. El segundo factor es la función generatriz del doble de una variante de Poisson, es decir, la probabilidad $e^{-\lambda_2 t} (\lambda_2 t)^{n/n!}$ está definida sobre el punto $2n$ en lugar de n . De la misma manera, el k -ésimo factor corresponde a una distribución de Poisson que asigna probabilidades a los múltiplos de k . De esta forma, la suma de las variantes independientes Y_1, Y_2, \dots , de forma que Y_k toma sólo los valores $0, k, 2k, \dots$, con probabilidades que corresponden a la distribución de Poisson. Esto permite interpretar el modelo de la siguiente forma: Sea N_j el número de variantes que, entre las X_1, X_2, \dots, X_N , son iguales a j . Entonces, se verifica que $N = N_1 + N_2 + \dots$, y la factorización de $h_t(s)$ nos establece que las variantes N_k son mutuamente independientes y están sujetas a distribuciones de Poisson. Esto, desde el punto de vista actuarial, y en el análisis de la distribución del número de siniestros, tiene una gran importancia, como lo resalta el mismo Feller en el siguiente ejemplo, referido a los accidentes de automóviles. Sea X_n el número de automóviles que intervienen en el n -ésimo accidente. Mediante la hipótesis de que las X_n son estocásticamente independientes entre sí, y de que el número N de accidentes sigue una distribución de Poisson, el número total de automóviles implicados en los accidentes está definido por $X_1 + X_2 + \dots + X_N$, y presenta una distribución de Poisson compuesta. Pues bien, consideremos por separado el número N_k de accidentes que afectan a, exactamente, K vehículos. Según la factorización de $h_t(s)$, las variantes N_k son mutuamente independientes y siguen

distribuciones de Poisson. Podemos, de esta forma, analizar la distribución del número de siniestros, como distribución de Poisson compuesta, en términos de las variantes correspondientes al número de siniestros afectados a cada siniestro.

Siguiendo a Nieto de Alba (1) podemos definir la distribución de Poisson compuesta de la siguiente forma: Sea ξ una variable aleatoria cuya función de distribución $G(x/\lambda)$ depende de un parámetro λ , que es, a su vez, otra variable aleatoria η , con función de distribución $S(\lambda)$. Entonces la función de distribución:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x/\lambda) dS(\lambda)$$

define la llamada distribución compuesta de ξ con respecto a η .

Si ξ tiene una distribución de parámetro λ ,

$$\pi_r = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} dS(\lambda)$$

define la llamada distribución compuesta, con π_r expresando la probabilidad de que el número de siniestros sea r .

Una distribución más general, que no precisa de la hipótesis de homogeneidad en el tiempo (intensidad de la siniestralidad como función del tiempo), es la definida de la siguiente forma:

$$\pi_r(s, s+t) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda \Delta)^r}{r!} e^{-\lambda \Delta} dS(\lambda)$$

donde

$$\Delta = \int_s^{s+t} \mu(z) dz$$

la función generatriz de la distribución de Poisson compuesta será:

$$\begin{aligned} E(Z^r) &= \sum_{r=0}^{\infty} Z^r \pi_r = \sum_{r=0}^{\infty} Z^r \int_0^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} dS(\lambda) = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(Z\lambda)^r}{r!} e^{-\lambda} dS(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{\lambda(Z-1)} dS(\lambda) \end{aligned}$$

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: La distribución del número de siniestros en la matemática del seguro. Estadística Española nº 23. Abril-Junio 1964. Pag. 11

Derivando p veces en $Z = 1$, obtenemos:

$$E\{r(r-1)\dots(r-p+1)\} = \int_0^{\infty} \lambda^p dS(\lambda) = E(\lambda^p)$$

Esta expresión nos permite establecer las siguientes relaciones en los momentos ordinarios:

$E(r) = E(\lambda) = m$ El valor probable de la distribución de Poisson compuesta coincide con el de la distribución de λ , $m_\lambda = m$.

$$E\{r(r-1)\} = E(\lambda^2), \text{ de donde } E(r^2) = E(\lambda^2) + E(\lambda)$$

$$E\{r(r-1)(r-2)\} = E(\lambda^3), \text{ " } E(r^3) = E(\lambda^3) + 3E(\lambda^2) + E(\lambda)$$

Esto nos permite establecer las siguientes relaciones entre los parámetros de la distribución de Poisson simple y compuesta:

$$\text{Media: } \mu = E(r) = E(\lambda) = m_\lambda = m$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = E(r^2) - \{E(r)\}^2 = \sigma_\lambda^2 + m_\lambda > m$$

dándonos una varianza para la distribución de Poisson compuesta mayor que en la distribución simple, donde coinciden media y varianza.

A su vez, se verifica que la probabilidad de no-siniestros es mayor en la distribución de Poisson compuesta que en la simple. En efecto, sea $P_r = m^r e^{-m}/r!$ la distribución de Poisson simple con número probable de siniestros m . Se verifica que $P_0 = e^{-m}$.

A su vez, sea

$$\Pi_r = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} dS(\lambda)$$

la distribución de Poisson compuesta, con número probable de siniestros, así mismo, m . Por verificarse que $e^x = 1+x$, $x \neq 0$, tendremos: $e^{m-\lambda} = 1+(m-\lambda)$, luego:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda} dS(\lambda) = e^{-m} \int_0^{\infty} e^{m-\lambda} dS(\lambda) > e^{-m} \int_0^{\infty} \{1+(m-\lambda)\} dS(\lambda) = \\ &= e^{-m} \left\{ \int_0^{\infty} dS(\lambda) + m \left(\int_0^{\infty} dS(\lambda) - 1 \right) \right\} = e^{-m} = P_0 \end{aligned}$$

por ser $S(\lambda)$ una función de distribución, la de una distribución de . Por tanto, $\Pi_0 > P_0$, que es la proposición enunciada.

Por otra parte, se verifica que, siendo π_1 y π_0 las probabilidades de un siniestro y de no-siniestro en la distribución de Poisson compuesta, respectivamente, $\pi_1 < m\pi_0$, siendo m el valor probable de dicha distribución. En efecto, tendremos:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \int_0^\infty e^{-\lambda} dS(\lambda); \quad \pi_1 = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda} dS(\lambda), \text{ luego:} \\ m\pi_0 - \pi_1 &= m \int_0^\infty e^{-\lambda} dS(\lambda) - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda} dS(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda} (m-\lambda) dS(\lambda) = \\ &= e^{-m} \int_0^\infty e^{m-\lambda} (m-\lambda) dS(\lambda) = e^{-m} \int_0^\infty \{1+(m-\lambda)\} (m-\lambda) dS(\lambda) = \\ &= e^{-m} \{1 + \int_0^\infty (m-\lambda)^2 dS(\lambda)\} > 0, \text{ como es obvio.}\end{aligned}$$

Por último, siendo $\psi(t)$ la función característica de la distribución de Poisson compuesta y $\phi(t)$ la función característica de la distribución del parámetro λ , cuya función de distribución es $S(\lambda)$, se verifica la siguiente relación entre las mencionadas funciones características (y por tanto entre las respectivas distribuciones):

$$\psi(t) = \phi\left(\frac{e^{it}-1}{i}\right)$$

En efecto, por definición: $\psi(t) = E(e^{itr}) = \sum_{r=0}^\infty e^{itr} \pi_r$ y

$\phi(t) = E(e^{it\lambda}) = \int_0^\infty e^{it\lambda} dS(\lambda)$. Por tanto, tendremos:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sum_{r=0}^\infty e^{itr} \pi_r = \sum_{r=0}^\infty e^{itr} \int_0^\infty \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} dS(\lambda) = \\ &= \int_0^\infty \frac{(e^{it\lambda})^r}{r!} e^{-\lambda} dS(\lambda) = \int_0^\infty e^{(e^{it}-1)\lambda} dS(\lambda) = \phi\left(\frac{e^{it}-1}{i}\right)\end{aligned}$$

Hasta aquí, la descripción de la distribución de Poisson compuesta. A lo sumo, introducir, a través de ella, el siguiente esquema, equivalente al de Feller, correspondiente a la heterogeneidad del riesgo: Sea un conjunto n de seguros de cualquier tipo. Representaremos por n_r al número de pólizas con r siniestros,

de tal forma que $n = n_0 + n_1 + n_2 \dots$. Una vez fijado el periodo de observación, tiempo actuarial, se verificará que para cualquier póliza, la probabilidad de r siniestros viene dada por la distribución de Poisson simple, con media λ . Ahora bien, si este parámetro λ varía entre los distintos individuos del grupo, podemos traducir esa heterogeneidad a través de la distribución del riesgo de λ (llamada "función de estructura" $S(\lambda)$ de los grupos homogéneos que constituyen la clase considerada).

Sin información previa, no es posible describir la distribución de riesgo $S(\lambda)$ en general y, en consecuencia, pormenoriza más la distribución de Poisson compuesta de como viene definida hasta ahora. Sin embargo, en muchos casos se hace la hipótesis de que dicha distribución es del Tipo III Pearson, es decir, con función de densidad:

$$S(\lambda) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-a\lambda} \quad \text{para } \lambda > 0$$

cuyos momentos característicos son: $\mu_\lambda = \frac{\alpha}{a}$; $\sigma_\lambda^2 = \frac{\alpha}{a^2}$

De esta forma, a través de esta hipótesis, la distribución de Poisson compuesta se traduce en una distribución binomial negativa:

$$\pi_r = \int_0^\infty \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-a\lambda} d\lambda = \frac{a^\alpha}{(1+a)^{r+1}} \frac{\Gamma(r+\alpha)}{r! \Gamma(\alpha)} =$$

$$= \binom{-\alpha}{r} \left(\frac{-1}{1+a} \right)^r \left(\frac{a}{1+a} \right)^\alpha \quad \text{con parámetros:} \quad \mu = \frac{\alpha}{a} = \mu_\lambda$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{a^2} \left(1 + \frac{1}{a} \right) = \sigma_\lambda^2 + \mu_\lambda$$

Para expresar a esta distribución binomial negativa según la forma tradicional, bastará establecer el cambio de parámetros: $a=h$; $\alpha/a=m$, con lo que resulta la función de cuantía:

$$\pi_r = \binom{-mh}{r} \left(\frac{-1}{1+h} \right)^r \left(\frac{h}{1+h} \right)^{mh}$$

cuando $h \rightarrow \infty$ y si $\alpha/a=m$ permanece constante, la distribución de riesgo $S(\lambda)$ tiende a la distribución casual,

$$S(\lambda) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} P(\lambda=m) = 1$$

Esto significa que se perdido el efecto de la heterogeneidad y que todas las unidades de riesgo tiene la misma media de siniestralidad.

Una interesante aplicación de la ley de Poisson compuesta, en relación con la variable "número de siniestros", y la tarificación se encuentra en el trabajo de Thyrión (1).

En él el autor pone de manifiesto cómo el análisis de las leyes de probabilidad de las variables que rigen el riesgo del automóvil debe servir de guía (al menos en teoría) para la elección del método de tarificación de dicho riesgo. Así, por ejemplo, la naturaleza de la ley de probabilidad de la variable "número de siniestros" puede servir de base teórica en la elaboración de una tarifa con bonificación por no siniestro. El trabajo estudia la validez de la compensación de dicha ley, mediante una ley de Poisson compuesta, modificada a efectos de tener en cuenta una variación en el tiempo de la tasa instantánea de siniestro. La comparación entre el resultado teórico y el empírico se hace sobre la base de momentos a posteriori, obtenidos mediante la subdivisión del conjunto de los riesgos observados durante un cierto período, por grupos definidos por el número de siniestros registrados durante diversos periodos anteriores de observación. Se comprueba, así que la influencia del comportamiento pasado de un riesgo sobre un comportamiento futuro puede preverse de modo satisfactorio con la ley de Poisson compuesta elegida.

(1) Thyrión, P.: Etude de la loi de probabilité de la variable "nombre de sinistres" dans l'assurance automobile. Communications de XVI^e Congrès International d'Actuaires. Bruselas, 1960. Volumen II. Pag. 25-36

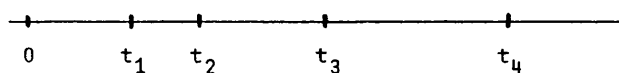
II.2.1.7.- EL NUMERO DE SINIESTROS COMO UN PROCESO ESTOCASTICO

Vamos a estudiar el problema de la distribución del número de siniestros valiéndonos de la teoría de los procesos estocásticos, que permite hablar con mayor precisión de las distintas hipótesis expuestas anteriormente. Se va a tratar de procesos de Markov (ξ_t) con estados $E_0, E_1 \dots E_n \dots$, donde E_n expresa el estado del sistema en el que han ocurrido n siniestros en el momento t , es decir, $\xi_t = n$.

En primer lugar estudiaremos los procesos en los que $\xi_0 = 0$ y, por tanto, solamente se dan las transiciones $E_n \rightarrow E_{n+1}$ ($n=0,1,2 \dots$), es decir, con $P_{n,n+1} = 1$. En estos casos, ξ_t representa el número de siniestros ocurridos en el intervalo temporal $(0,t)$, y lo que nos proponemos es establecer $P(\xi_t=n) = P_n(t)$.

II.2.1.7.1.- EL PROCESO DE POISSON HOMOGENEO

Consideremos una sucesión en el tiempo de sucesos aleatorio que tienen lugar en los instantes t_1, t_2, \dots . Así, por ejemplo, llamadas a una central telefónica, desintegraciones de átomos radiactivos, siniestros en una cartera de seguros, etc.



Nos limitaremos a considerar un intervalo de tiempo t fijo y a calcular la probabilidad $P_n(t)$ de que se produzcan n sucesos (siniestros, por ejemplo) en el intervalo de longitud t . El proceso de Poisson homogéneo se basa en las siguientes hipótesis:

(1) Homogeneidad en el tiempo:

Se supone que se verifica: $P(\xi_{t_0+t} - \xi_{t_0} = n) = P_n(t)$, es decir,

la probabilidad de que ocurran n siniestros durante el tiempo t es independiente del origen t_0 , y sólo depende de la magnitud de t . Esto se puede expresar diciendo que las probabilidades $P_n(t)$ son las mismas a lo largo del tiempo físico, es decir, que en dos intervalos (t_1, t_2) y (t_3, t_4) son las mismas si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$.

(2) Homogeneidad en el espacio o independencia:

Tomando los intervalos $(0,s)$ y $(0,s+t)$, esta hipótesis supone que las variantes ξ_s y $\xi_{t+s} - \xi_s$ son independientes. Esto implica que el número de siniestros acaecidos en el intervalo $(s,s+t)$ es independiente del número de siniestros ocurridos previamente en $(0,s)$. O, lo que es lo mismo, los números de siniestros acaecidos en dos intervalos de tiempo no ram-pantes son variables aleatorias independientes.

(3) Sucesos raros:

La probabilidad de una transición (siniestro) en el periodo $(t, t+\Delta t)$ se supone igual a $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, es decir, la probabilidad de un solo siniestro en el tiempo Δt es asintóticamente $\lambda \Delta t$:

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

$$\text{Esto supone que: } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda.$$

Esta hipótesis significa que la probabilidad de un sólo siniestro no depende más que de la longitud de tiempo considerado y para un tiempo Δt breve se supone proporcional al tiempo.

(4) Imposibilidad de siniestros múltiples simultáneos:

La probabilidad de más de un siniestro en el periodo $(t, t+\Delta t)$ es un infinitésimo de orden superior. Es decir:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - P_0(\Delta t) - P_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Como $1 - P_0(\Delta t) - P_1(\Delta t) = P_2(\Delta t) + P_3(\Delta t) + \dots$, resulta:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_k(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \quad \text{para } k > 1$$

A partir de estas cuatro hipótesis, es posible establecer el siguiente :

Teorema: Si (ξ_t) es un proceso de Poisson homogéneo, entonces se verifica lo siguiente:

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad \text{con } n \geq 1$$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$$

cuya solución es: $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

Para demostrar este trabajo, sigamos, por ejemplo, a Sixto Rios (1). La probabilidad $P_n(t+\Delta t)$ de n siniestros en el tiempo $t+\Delta t$ será el producto de la probabilidad $P_n(t)$ de n siniestros en el tiempo t por la probabilidad $P_0(\Delta t)$ de cero siniestros en el tiempo Δt , más el producto de la probabilidad $P_{n-1}(t)$ de $n-1$ siniestros en t por la probabilidad $P_1(\Delta t)$ de un siniestro en el tiempo Δt , más la probabilidad $P_{n-2}(t)$ por la probabilidad $P_2(\Delta t)$, etc. De esta forma, tendremos:

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t) P_1(\Delta t) + P_{n-2}(t) P_2(\Delta t) + \dots + P_0(t) P_n(\Delta t)$$

operando tendremos:

$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = P_n(t) \{P_0(\Delta t) - 1\} + P_{n-1}(t) P_1(\Delta t) + P_{n-2}(t) P_2(\Delta t) + \dots + P_0(t) P_n(\Delta t)$$

$$\frac{\Delta P_n(t)}{\Delta t} = P_n(t) \frac{P_0(\Delta t) - 1}{\Delta t} + P_{n-1}(t) \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t} + P_{n-2}(t) \frac{P_2(\Delta t)}{\Delta t} + \dots + P_0(t) \frac{P_n(\Delta t)}{\Delta t}$$

Pasando al límite y teniendo en cuenta las condiciones establecidas por las hipótesis del modelo, tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{d P_n(t)}{dt} &= -P_n(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{P_2(\Delta t)}{\Delta t} + \dots \right\} + P_{n-1}(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t} &= -P_n(t) \lambda + P_{n-1}(t) \lambda = \lambda \{P_{n-1}(t) - P_n(t)\} \end{aligned}$$

Por tanto, tendremos la ecuación:

$$\frac{d P_n(t)}{dt} = \lambda \{P_{n-1}(t) - P_n(t)\} \quad (1)$$

Para $n = 0$, tenemos que la probabilidad $P_0(t)$ de cero siniestros en el tiempo t verificará:

$$\frac{d P_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

Integremos esta ecuación de variables separadas:

$$\frac{d P_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda dt \quad \text{luego } \log P_0(t) = -\lambda t + \log K$$

es decir:

$$P_0(t) = K e^{-\lambda t}$$

Imponiendo la condición natural de que $P_0(0) = 1$, es decir, $K = 1$, obtenemos la siguiente solución de la anterior ecuación diferencial:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Si ponemos ahora: $P_n(t) = \Pi_n(t) e^{-\lambda t}$, la ecuación (1) se transforma en:

$$\Pi'_n(t) = \lambda \Pi_{n-1}(t)$$

y como $\Pi_0(t) = 1$, se tendrá:

$$\begin{aligned} \Pi'_1(t) &= \lambda \quad \text{cuya solución es } \Pi_1(t) = \lambda t \\ \Pi'_2(t) &= \lambda^2 t \quad " \quad " \quad \Pi_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\Pi'_n(t) = \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{cuya solución es } \Pi_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

por lo que obtenemos:

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

que verifica la ecuación natural $P_n(0) = 0$ para $n > 0$. Se obtiene entonces la ley de Poisson de parámetro λt .

Una forma diferente de plantear y demostrar la solución del proceso de Poisson homogéneo la encontramos en el trabajo de Beard, Pentikäinen y Pesonen (1).

Siguiendo a estos autores, analicemos la secuencia de siniestros en la cartera de un ente asegurador, que es un proceso estocástico. Sea $v(t)$ el número de siniestros acaecidos en el intervalo semicerrado $(0, t]$, $(t, 0)$. Sea $v(0) = 0$ y sea $s > 0$ y $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$. Establezcamos las siguientes tres hipótesis para el proceso:

- (1) Los siniestros producidos en dos intervalos de tiempo disjuntos son independientes (independencia de incrementos). Esto supone que las variantes $v(t_2) - v(t_1)$ y $v(t_4) - v(t_3)$ son estocásticamente independientes.
- (2) El número de siniestros en un intervalo de tiempo $(t_1, t_2]$ depende sólo de la longitud del intervalo, $t = t_2 - t_1$, pero no del extremo inferior del mismo, t_1 (estacionariedad de los incrementos). Esto supone que las variantes $v(s+t) - v(t)$ y $v(s)$ tienen la misma distribución.
- (2') $P \{v(s+t) - v(t) = 0\} = P \{v(s) = 0\}$
- (3) La probabilidad de que se produzcan simultáneamente más de un siniestro, así como la probabilidad de que se produzca un infinito número de siniestros en algún intervalo temporal finito son ambas nulas (exclusión de siniestros múltiples).

En estas condiciones, vamos a demostrar que, si se asumen las hipótesis anteriormente formuladas, el proceso genera la bien conocida distribución de Poisson:

$$P_k(t) = e^{-qt} \frac{(qt)^k}{k!}$$

donde $P_k(t)$ expresa la probabilidad de que se produzcan exactamente k siniestros en un intervalo temporal semicerrado de longitud t , y q es un parámetro que expresa el número medio de siniestros por unidad de tiempo.

(1) Beard, R.E.- Pentikäinen, T.- Pesonen, E.: Obra citada. Pag. 8. y 170-173

En efecto, sea $P_k(t) = P\{v(t) = k\}$. Para $s, t > 0$, de acuerdo con (1) y (2), tendremos:

$$\begin{aligned} P_0(s+t) &= P\{v(s+t) = 0\} = P\{v(s) = 0, v(s+t) - v(s) = 0\} = \\ &= P\{v(s) = 0\} P\{v(t) = 0\} = P_0(s) P_0(t) \end{aligned}$$

es decir:

$$P_0(s+t) = P_0(s) P_0(t)$$

Por tanto, $P_0(t)$ es, siempre, una función no-creciente. Sean s y t números enteros positivos. De acuerdo con la expresión anterior, tendremos:

$$P_0(st) = \{P_0(s)\}^t = \{P_0(t)\}^s$$

dando como resultado:

$$\{P_0(t)\}^{1/t} = P_0(1) = K \leq 1$$

La constante no negativa K no puede ser cero, dado que, si $P_0(t) = 0$ para todo racional t , entonces, de acuerdo con (2), todo intervalo contendría al menos un siniestro de probabilidad uno, con lo que el intervalo $(0, t)$ contendría un infinito número de siniestros con probabilidad uno, contrariamente a lo establecido en la hipótesis (3). Por tanto, la constante K es no nula, y la podremos representar de la forma: $K = e^{-q} (q \geq 0)$, definiéndonos entonces:

$$P_0(t) = e^{-qt} \quad \text{con } q \geq 0 \quad (I)$$

Esto es cierto para cualquier número t racional positivo. Además, dado que $P_0(t)$ es siempre no-creciente, $P_0(t)$ no puede presentar discontinuidades y es, entonces, continua. De esta forma, la ecuación (I) es también cierta para valores irracionales de t .

A efectos de determinar $P_k(t)$ para $k > 0$, sea h un entero tal que $n = 2^h > k$, y establezcamos la siguiente partición del intervalo $(0, t]$:

$$I_i = \left[\frac{i-1}{n} t ; \frac{i}{n} t \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Esta partición goza de la propiedad de que, cuando h se incrementa, los puntos de división en la preexistente partición

continúan siendo puntos de división en la nueva partición. Del conjunto de todas las posibles realizaciones del proceso (varian ambas variables, el número de siniestros u y su localización en $(0, t]$), seleccionamos dos subconjuntos, para cada valor fijo de h , de la siguiente forma:

A_h = Conjunto de todas las realizaciones (funciones aleatorias) que verifican la propiedad de que, al menos, se produce un siniestro en exactamente k intervalos I_i , es decir, realizaciones para las cuales exactamente $n-k$ intervalos permanecen sin siniestros (siendo $u \geq k$)

B_h = Campo de todas las realizaciones en las que, al menos en un intervalo I_i , se produce un mínimo de dos siniestros (por tanto, $u \geq 2$)

Evidentemente se verifica: $\{u(t) = k\} \subset A_h \cup B_h$ dado que a efectos de que se produzcan exactamente k siniestros, es necesario que, o bien k intervalos diferentes incluyan siniestros, o bien algún intervalo debe incluir al menos dos siniestros.

Por otro lado se verifica:

$$A_h - A_h \cap B_h \subset \{u(t) = k\}$$

puesto que el término de la izquierda incluye solo realizaciones cuando se producen siniestros en exactamente k intervalos y en ningún caso en número mayor que uno. Entonces, tenemos:

$$P\{A_h - A_h \cap B_h\} \leq P_k(t) \leq P\{A_h \cup B_h\}$$

es decir,

$$P(A_h) - P(B_h) \leq P_k(t) \leq P(A_h) + P(B_h) \quad (II)$$

Para probar que $P(B_h) > 0$, sea X una realización arbitraria. Se presentan dos posibilidades:

- (1) X es tal que, para un cierto valor de h , todo intervalo contiene como máximo un siniestro.
- (2) X es tal que, con independencia del valor de h , existe siempre al menos un intervalo en el cual se producen, como mínimo, dos siniestros.

Es evidente que $\lim_{h \rightarrow \infty} P(B_h)$ podrá ser > 0 sólo si las realizaciones del tipo (2) tienen probabilidad positiva. Hay dos caminos

para pertenecer a la categoría (2). O bien algún punto de división debe de conterner dos (o más) siniestros, o, si no, los puntos de siniestro deben tener un punto de acumulación. Estas dos posibilidades, ambas, tienen probabilidad cero, de acuerdo con la hipótesis (3) (exclusión de siniestros múltiples).

Volviendo a la expresión (II), nos queda por calcular $P_k(t) = \lim P(A_n)$. La probabilidad de que, en un determinado I_i , se produzca al menos un siniestro, es, de acuerdo con (I),

$$1 - P_0(t/n) = 1 - e^{-qt/n}$$

Entonces la probabilidad de que se produzcan siniestros en exactamente k intervalos determinados, será:

$$(1 - e^{-qt/n})^k (e^{-qt/n})^{n-k}$$

Estos k intervalos pueden ser elegidos según $\binom{n}{k}$ formas diferentes, por lo que:

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \binom{n}{k} (1 - e^{-qt/n})^k (e^{-qt/n})^{n-k} = \\ &= \frac{1}{k!} e^{-qt} (1 - e^{-qt/n})^k n^k (e^{qtk})^{1/n} (1 - \frac{k-1}{n}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \\ &= \frac{e^{-qt}}{k!} \left(\frac{1 - e^{-qt/n}}{1/n} \right)^k \left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \\ &= \frac{e^{-qt}}{k!} \left\{ - \left(\frac{e^{-qtx}}{x} \right)_{x=0}^k + 0\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \left(1 + 0\left(\frac{1}{n}\right) \right) e^{-qt} \frac{(qt)^k}{k!} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P_k(t) = e^{-qt} \frac{(qt)^k}{k!} \quad \text{siendo } q \geq 0$$

De acuerdo con (I), esta expresión es igualmente válida para $k = 0$. Hemos definido entonces el proceso $u(t)$ como un proceso de Poisson.

Análisis actuarial de la hipótesis del modelo

Capítulo aparte merece el análisis de las hipótesis en que se sustenta el proceso de Poisson homogéneo, en el carácter restrictivo de las mismas, como el de cualquier hipótesis de trabajo en cualquier modelo. Sigamos a Beard, Pentikäinen y Pesonen (1) en su acertado análisis sobre tales hipótesis.

"La condición (1) (independencia de incrementos) significa, de hecho, que un siniestro (por ejemplo un incendio) no puede dar lugar a otros siniestros (exclusión de "reacciones en cadena").

En la práctica, de cualquier forma, un incendio puede frecuentemente extenderse desde un punto de riesgo a otro, en contradicción con la hipótesis.

De cualquier forma, la condición (1) puede ser perfectamente asumida si se define, como es costumbre en la práctica resaseguradores, una unidad de riesgo, como combinación de todos los riesgos colindantes, cuando entre ellos es posible un efecto de "contaminación" (por ejemplo, todo objeto de valor en un edificio, con independencia de si esté formalmente asegurado por una o varias pólizas, o si su propietario es individual o múltiple). En el mismo sentido, un barco y su carga son considerados como una unidad de riesgo, y así sucesivamente. De todas formas, no siempre es posible definir unidades de riesgo de forma tal que no se produzca contaminación con elementos no incluidos en dicha unidad. Tal es el caso de las enfermedades contagiosas en el seguro de enfermedad o de epidemia en el seguro de vida. En estos casos, la distribución de Poisson no es aplicable, al menos, no sin considerables modificaciones.

La condición (2), concerniente a la estacionariedad de los incrementos, significa que, en términos de conjunto, el flujo de sucesos es estacionario, es decir, no se produce incremento o

(1) Beard, R.E.- Pentikäinen, T.- Pesonen, E.: Obra citada. Pag. 8-10

decremento sostenido que suponga una oscilación superiora la esperada por las fluctuaciones aleatorias normales. Esto es lo que usualmente sucede en los seguros, particularmente durante periodos cortos de tiempo, en los que los números de pólizas u otras circunstancias, no están sujetos a acusadas diferencias. Esta condición implica que la cartera es lo suficientemente grande como para que la salida de pólizas individuales, con motivo de siniestro u otras causas, y la entrada de nuevas, no afecte al flujo colectivo de siniestros hasta un grado significativo.

De todas formas, se producen frecuentemente en la práctica actuarial circunstancias que hacen inadmisibile la asunción de las condiciones o hipótesis (1) y (2). Por ejemplo, el seguro de incendios puede verse grandemente afectado por las condiciones climatológicas, y, así, un prolongado periodo de tiempo seco y soleado puede dar lugar numerosos incendios de carácter anormal; en algunos países, los huracanes y otras catástrofes naturales dan lugar a un enorme incremento en el número de incendios, así como influye considerablemente en el seguro de crédito. Circunstancias como las mencionadas son tan generales que la aplicación de la ley de Poisson resulta grandemente limitada y, por tanto, resulta una necesidad para el desarrollo de la teoría la omisión de las condiciones concernientes a la independencia y estacionariedad. De cualquier forma, al margen de dichas limitaciones, la función de Poisson ofrece con frecuencia al menos una buena primera aproximación, particularmente para cortos intervalos de tiempo. Aún más, el riesgo de cambios y de variaciones contrarias a la estacionariedad puede ser frecuentemente obviado mediante la simple adición de un margen de prudencia al valor constante q

Como se mostró en la demostración del proceso de Poisson, la condición de estacionariedad puede satisfacerse a veces mediante el uso de una apropiada transformación no lineal en el eje de tiempos. En algunos problemas, incluso dicha transformaciones innecesaria. Cambios en el flujo estacionario de sucesos frecuentemente no producen cambios en la funciones y únicamente sí cambios en el valor de la constante q . Ello proviene del hecho de que la suma de dos o más variantes de Poisson es, así mismo, una variante

de Poisson. De esta forma, incluso cuando el proceso presenta variaciones estacionales u otras oscilaciones o cambios, que sean predecibles de antemano, se puede dividir el eje temporal en partes (por ejemplo, en meses o estaciones) y la ley de Poisson resulta satisfactoria para cada uno de los sub-procesos. De esta forma, la suma para todo el periodo se encuentra distribuida se encuentra distribuida según la ley de Poisson, en contra del hecho de que la condición de estacionariedad no se verifica estrictamente. La cuestión queda reducida entonces a la elección de un apropiado valor para la constante q .

A primera vista, podría parecer que la condición (3), la exclusión de siniestros múltiples, no siempre se cumple. Por ejemplo en el seguro de automóviles, dos vehículos pueden colisionar dando lugar a un doble siniestro. Similar tipo de siniestros puede producirse en el seguro de barcos y algunos otros ramos. Esta dificultad puede, de cualquier forma, ser obviada mediante una adecuada elección de definición, por ejemplo, considerando el caso de colisiones múltiples como un único siniestro. Esto significa, entonces, que la suma de las cuantías de los siniestros en los distintos vehículos que colisionan es considerada al elaborar las estadísticas de la distribución de la cuantía de un siniestro, distribución que consideraremos posteriormente. Por otra parte, la exclusión de un infinito número de siniestros no supone una restricción desde el punto de vista de las aplicaciones".

Todas estas circunstancias han de ser consideradas para trabajar con el modelo de Poisson como modelo de la distribución del número de siniestros.

II.2.1.7.2.- EL PROCESO DE POISSON NO HOMOGENEO EN EL TIEMPO

La primera hipótesis que permite definir el proceso de Poisson homogéneo, correspondiente a la homogeneidad en el tiempo, no se verifica de manera adecuada en múltiples riesgos, en los

ue la probabilidad de siniestro varía según las estaciones del año, los meses e incluso las horas del día.

Esta hipótesis queda abandonada si suponemos que la intensidad de siniestralidad es función del tiempo t . En este caso, tendremos:

$$P'_n(t) = -\lambda(t) \{P_n(t) - P_{n-1}(t)\}$$

$$P'_0(t) = -\lambda(t) P_0(t)$$

La solución de este sistema es: $P_n(t) = e^{-\Delta(t)} \frac{\Delta(t)^n}{n!}$

siendo: $\Delta(t) = \int_0^t \lambda(z) dz$

También se tiene:

$$P\{\xi_t - \xi_s = n\} = \frac{\{\Delta(t) - \Delta(s)\}^n}{n!} e^{-\{\Delta(t) - \Delta(s)\}}$$

y sólomente para el caso en que $\Delta(t) - \Delta(s) = \lambda(t-s)$ se obtendría el proceso homogéneo.

II.2.1.7.3.- PROCESOS DE CONTAGIO

El proceso de Poisson homogéneo se basaba en dos hipótesis fundamentales, a saber, la homogeneidad en el tiempo y la homogeneidad en el espacio o independencia. Si de ellas, sólo se prescinde de la homogeneidad en el tiempo, surge el proceso de Poisson no homogéneo, como hemos tenido ocasión de ver. Ahora bien, la segunda hipótesis de independencia u homogeneidad en el espacio tampoco es de aplicación a muchos iresgos, donde se produce un efecto de contagio, es decir, donde la aparición de un siniestro tiene un efecto futuro.

Esta hipótesis de independencia se abandona suponiendo que la intensidad de siniestralidad λ depende del número de siniestros, n . Si además, suponemos que depende de t (es decir, no homogeneidad en el tiempo, aparecerá una intensidad $\lambda_n(t)$, cuya incidencia en el proceso del riesgo vamos a analizar.

Denotemos, como siempre, por $P_n(t)$ la probabilidad de que, en el intervalo $(0, t]$, una póliza de seguros haya sufrido n si-

niestros. En el transcurso del intervalo temporal $(t, t+\Delta t]$, es posible:

- a/ El acaecimiento de un nuevo siniestro, es decir, que se produzca el tránsito del estado E_n al estado E_{n+1} .
- b/ Que la póliza permanezca, en $t+\Delta t$, en el estado E_n .

Demostrando por $\lambda_n(t)$ la probabilidad de transición del estado E_n al $n+1$, se verificará:

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) \{1 - \lambda_n(t)\Delta t\} + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}(t)\Delta t.$$

es decir:

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}(t) - P_n(t)\lambda_n(t)$$

que, pasando al límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, nos define la ecuación diferencial en diferencias finitas:

$$P'_n(t) = -\lambda_n(t) P_n(t) + \lambda_{n-1}(t) P_{n-1}(t)$$

ecuación únicamente válida para $n \geq 1$. Para $n = 0$, sólo es posible la transición $E_0 \rightarrow E_1$, por lo que se tendrá para este caso:

$$P'_0(t) = -\lambda_0(t) P_0(t)$$

Así pues, se define el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} P'_n(t) &= -\lambda_n(t) P_n(t) + \lambda_{n-1}(t) P_{n-1}(t) \\ P'_0(t) &= -\lambda_0(t) P_0(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

Al dar valores a n en la primera ecuación, obtenemos un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales en diferencias finitas que, junto con las condiciones iniciales, nos permite analizar el comportamiento del proceso estocástico de riesgo. Las condiciones iniciales, evidentemente son:

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$$

La solución del sistema (I) resulta ser:

$$P_n(t) = e^{-\int_0^t \lambda_n(\tau) d\tau} \int_0^t \lambda_{n-1}(\tau) P_{n-1}(\tau) e^{\int_0^\tau \lambda_n(z) dz} d\tau$$

$$P_0(t) = e^{-\int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau}$$

Se verifica la relación: $\lambda_{n+1}(t) = \lambda_n(t) - \lambda'_n(t)/\lambda_n(t)$

que nos permite conocer los distintos $\lambda_n(t)$, una vez conocido $\lambda_0(t)$, que es:

$$\lambda_0(t) = -P'_0(t)/P_0(t)$$

Analicemos los casos más importantes de procesos de contagio, que serán los siguientes:

II.2.1.7.3.1.- PROCESO DE POLYA-EGGEMBERGER

El proceso de Polya-Eggemberger es un proceso de contagio positivo que se caracteriza porque en él $\lambda_n(t)$ es directamente proporcional al número n de siniestros acaecidos a la póliza en cuestión (contagio positivo) en $(0, t]$, e inversamente proporcional a la longitud del periodo considerado, t . Por tanto, adoptará una expresión de la forma:

$$\lambda_n(t) = \frac{a+n}{b+t}$$

Veamos como la solución de dicho proceso (es decir, de su ecuación diferencial característica) resulta ser la distribución binomial negativa, que se convertirá entonces en caso característico de un proceso de contagio.

Para obtener dicha solución, es preciso integrar el sistema

$$\left. \begin{aligned} P'_n(t) &= -\lambda_n(t) P_n(t) + \lambda_{n-1}(t) P_{n-1}(t) \\ P'_0(t) &= -\lambda_0(t) P_0(t) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

satisfaciendo las condiciones iniciales: $P_0(0) = 1$, $P_n(0) = 0$ ($n \geq 1$) y siendo

$$\lambda_n(t) = \frac{a+n}{b+t} \quad (II)$$

La solución aparece facilmente si efectuamos en (II) la siguiente transformación:

$$\lambda_n(t) = \frac{a+n}{b+t} = \frac{a(1+\frac{n}{a})}{b(1+\frac{t}{b})} = \frac{1+\frac{n}{a}}{1+\frac{t}{b}} \cdot \frac{a}{b}$$

Haciendo $a/b = \lambda$, tendremos que $b = a/\lambda$ y, por tanto:

$$\lambda_n(t) = \frac{1+n/a}{1+\lambda t/a} \lambda \quad (\text{III})$$

Entonces, la solución del sistema (I) puede obtenerse de la siguiente forma: Si en (III) hacemos $n = 0$, resulta:

$$\lambda_0(t) = \frac{a\lambda}{a+\lambda t}$$

de forma que la ecuación diferencial: $P'_0(t) = -\lambda_0(t) P_0(t)$ pasa a expresarse de la siguiente forma:

$$P'_0(t) = -\frac{a\lambda}{a+\lambda t} P_0(t)$$

que, integrada, nos da: $\log_e P_0(t) = -a \log_e(a+\lambda t) + \log_e K$, es decir:

$$P_0(t) = K \left(\frac{1}{a+\lambda t} \right)^a$$

La constante K se determina haciendo uso de las condiciones iniciales. En efecto, $t = 0$, tendremos:

$$P_0(0) = K \left(\frac{1}{a} \right)^a = 1, \text{ de donde } K = a^a \text{ quedando la solución}$$

buscada de la siguiente forma:

$$P_0(t) = \left(\frac{a}{a+\lambda t} \right)^a$$

La primera ecuación del sistema (I) para $n = 1$ es:

$$P'_1(t) = \lambda_0(t) P_0(t) - \lambda_1(t) P_1(t)$$

Como:

$$\lambda_1(t) = \frac{a+1}{a+\lambda t} \quad \text{y} \quad \lambda_0(t) = \frac{a}{a+\lambda t} \lambda, \text{ dicha ecuación es:}$$

$$P'_1(t) = \frac{a\lambda}{a+\lambda t} \left(\frac{a}{a+\lambda t} \right)^a - \frac{a+1}{a+\lambda t} \lambda P_1(t)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Su solución particular correspondiente a las condiciones iniciales propuestas es:

$$P_1(t) = a \left(\frac{a}{a+\lambda t} \right)^a \frac{\lambda t}{a+\lambda t}$$

Para obtener $P_2(t)$ se procede de manera análoga a la seguida para deducir $P_1(t)$, método que es general para cualquier valor de n entero y positivo. De esta forma, se obtiene la siguiente solución general:

$$P_n(t) = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{n!} \left(\frac{a}{a+\lambda t}\right)^a \left(\frac{\lambda t}{a+\lambda t}\right)^n =$$

$$= \binom{n+a-1}{n} \left(\frac{a}{a+\lambda t}\right)^a \left(\frac{\lambda t}{a+\lambda t}\right)^n \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Basta con que hagamos:

$$p_t = \frac{a}{a+\lambda t}, \quad q_t = 1 - p_t = \frac{\lambda t}{a+\lambda t} \quad \text{y } a = N \quad \text{para que obtengamos:}$$

$$P_n(t) = \binom{N+n-1}{n} p_t^N q_t^n$$

que es la solución de cuantía de una distribución binomial negativa. Surge entoncez esta distribución como solución de un proceso de Polya-Eggenberger. Otra posible forma de expresar su función de cuantía sería, sin más que hacer los adecuados cambios de parámetros, y mediante las propiedades de los coeficientes binómicos, la siguiente:

$$P_n(t) = \binom{-h}{n} \left(\frac{-t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{h+t}\right)^h$$

II.2.1.7.3.2.- PROCESO DE HOFMAN

Se trata de un proceso de contagio positivo, donde se establece la hipótesis:

$$\lambda_0(t) = \rho(1+ct)^{-a}$$

En el caso de que $a = 1$, el proceso es de Polya, que entonces resulta ser un caso particular del proceso de Hofman.

II.2.1.7.3.3.- PROCESO DE GREENWOOD-YULE

Se trata de un proceso de contagio negativo. Se parte de la hipótesis de que la probabilidad de siniestro es al principio, y para todos los riesgos, igual a δ , y, después de la aparición de un siniestro, disminuye a ϵ , permaneciendo constante en ese valor. Por tanto, se verifica:

$$\lambda_n(t) = \lambda_n = \begin{cases} \delta & \text{si } n = 0 \\ \epsilon & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Este proceso de contagio negativo, que es homogéneo con respecto al tiempo t , se conoce con el expresivo nombre de "burnt finger distribution", que literalmente se traduciría por "distribución del dedo quemado", y expresa el hecho figurado de que el individuo en cuestión, una vez que se ha "quemado el dedo" en el primer siniestro, se hace más prudente (contagio negativo).

II.2.1.7.4.- PLANTEAMIENTO GENERAL DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS

La obtención de las fórmulas fundamentales de la clase de procesos estocásticos que hemos venido analizando puede hacerse, en general, a partir de la conocida propiedad de la función característica de una suma de variantes, que consiste en lo siguiente:

Sea $\zeta = \xi + \eta$. La función característica de dicha variante suma, con $S = e^{\theta}$, será:

$$\phi_{\zeta}(S) = E(S^{\xi+\eta}) = \int_{x\eta y} S^{x+y} dF(x,y) = \int_x S^x dF(x).$$

$$\int_y S^y dF(y/x) = E_{\xi} \{ S^{\xi} \phi_{\eta}(S/\xi) \}$$

En el caso de que ξ y η sean variantes estocásticamente independientes, la función característica de ζ adopta la forma:

$$\phi_{\xi+\eta}(S) = E_{\xi} \{ S^{\xi} \phi_{\eta}(S) \} = \phi_{\xi}(S) \phi_{\eta}(S)$$

Supongamos que se trata de un proceso estocástico, v_t . En este caso, $n_t = v_{t+\Delta t} - v_t$, es decir, si v_t fuera el número de elementos del sistema en el instante t , n_t representaría al número de elementos que ingresan en el sistema en el intervalo temporal $(t, t+\Delta t)$. La fórmula anterior adoptará entonces la siguiente forma:

$$\phi_{t+\Delta t}(S) = E_{v_t} [S^{v_t} \phi_{\Delta t}(S/v_t)]$$

Es evidente que si $\phi_{\Delta t}(S/v_t)$ no depende de valores anteriores a t , se trata de un proceso markoviano. Vamos a suponer en lo sucesivo que los procesos son markovianos.

Para la determinación de $\phi_{\Delta t}(S/v_t)$, supondremos que la probabilidad de que ingrese en el sistema un elemento en el intervalo $(t, t+\Delta t)$, es de la forma:

$$\lambda(v_t, t) \Delta t + o(\Delta t), \quad \text{con} \quad \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$$

de esta forma tendremos:

$$\begin{aligned} \phi_{\Delta t}(S/v_t) &= \lambda(v_t, t) \Delta t \cdot S + (1 - \lambda(v_t, t) \Delta t) + o(\Delta t) = \\ &= 1 + (S-1) \lambda(v_t, t) \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} \phi_{t+\Delta t}(S) &= E_{v_t} \{S^{v_t} (1 + (S-1) \lambda(v_t, t) \Delta t)\} + o(\Delta t) = \\ &= \phi_t(S) + (S-1) E_{v_t} \{S^{v_t} \lambda(v_t, t)\} \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

En definitiva, tendremos la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial \phi_t(S)}{\partial t} = (S-1) E_{v_t} \{S^{v_t} \lambda(v_t, t)\}$$

I.- PROCESO DE POISSON

En el caso de que $\lambda(v_t, t) = \lambda(t)$, que corresponde a la hipótesis de regularidad, no contagio, de Poisson, tendremos que la ecuación diferencial será la siguiente:

$$\frac{\partial \phi_t(S)}{\partial t} = \phi_t(S) \lambda(t) (S-1)$$

La solución general de dicha ecuación es:

$$\phi_t(S) = H(S) e^{(S-1) \int_0^t \lambda(u) du}$$

La determinación de la función arbitraria $H(S)$ se hará por medio de la condición de contorno: $\phi_0(S) = S^{n_0}$, siendo n_0 la población original. Evidentemente se verifica: $H(S) = S^{n_0}$, luego:

$$\phi_t(S) = S^{n_0} e^{(S-1) \int_0^t \lambda(u) du} = e^{-\tau} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{S^{n_0+r} \tau^r}{r!}$$

en la que $\tau = \int_0^t \lambda(u) du$, sin más que considerar el desarrollo en serie de $e^{S\tau}$.

La probabilidad de que haya n_0+r elementos en el sistema en el tiempo t , será entonces:

$$P(v_t = n_0 + r) = e^{-\tau} \frac{\tau^r}{r!}$$

que, como se ve, es una distribución de Poisson de parámetro τ para $n_0 = 0$, es decir, población inicial nula. En este supuesto, es decir, en el caso de que $n_0 = 0$, se verifica:

$$\phi_t(S) = e^{-\tau(S-1)} = e^{-\tau} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\tau S)^r}{r!}$$

con lo que la probabilidad de que haya r elementos en el sistema en el tiempo t será:

$$P(v_t = r) = e^{-\tau} \frac{\tau^r}{r!}$$

que, como dijimos anteriormente, sigue la distribución de Poisson de parámetro τ .

II.- PROCESO DE POLYA

En el caso de la hipótesis de Polya, $\lambda(v_t, t) = \frac{h+v_t}{h+t}$, nos encontramos con un proceso de contagio, y la ecuación fundamental del mismo será:

$$\frac{\partial \phi_t(S)}{\partial t} = (S-1) E_{v_t} \left[S^{v_t} \frac{h+v_t}{h+t} \right]$$

La ecuación adoptará la forma:

$$(h+t) \frac{\partial \phi_t(S)}{\partial t} = (S-1) h \phi_t(S) + S(S-1) E_{v_t} (v_t S^{v_t-1}) =$$

$$= (S-1) h \phi_t(S) + S(S-1) \frac{\partial \phi_t(S)}{\partial S}$$

luego:

$$(h+t) \frac{\partial \phi_t(S)}{\partial t} + S(1-S) \frac{\partial \phi_t(S)}{\partial S} = h(S-1) \phi_t(S)$$

El sistema adjunto será:

$$\frac{dt}{h+t} = \frac{dS}{S(1-S)} = \frac{d\phi}{h(S-1)\phi}$$

La solución general será:

$$\phi_t(S) = S^{-h} \Psi\left(\frac{1-S}{S} (h+t)\right)$$

Si imponemos la condición de contorno $n_0 = 0$, que supone que la población original es nula, tendremos: $t = 0$, $\phi_t(S) = 1$, es decir:

$$\phi_t(S) = \left\{1 - \frac{t}{h} (S-1)\right\}^{-h} = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{\frac{-h}{r}\right\} \left\{\frac{h}{h+t}\right\}^h \left(\frac{-t}{h+t}\right)^r$$

que, como sabemos, es la función característica de la distribución binomial negativa, cuya función de cuantía es:

$$P(v_t = n) = \left\{\frac{-h}{n}\right\} \left\{\frac{h}{n+t}\right\}^h \left(\frac{-t}{n+t}\right)^n$$

Para un análisis profundo de todos estos procesos estocásticos, se puede consultar la reciente obra de Vegas Pérez, titulada "Estadística. Aplicaciones econométricas y actuariales" (1), donde el autor analiza con toda profundidad y extensión la teoría de los procesos estocásticos y, en concreto, los procesos de Poisson y de contagio.

(1) Vegas Pérez, Angel: Estadística. Aplicaciones econométricas y actuariales. Ed. Pirámide, 1980. 374 pag.

II.2.1.7.5.- PROCESOS DE MARKOV PARA SINIESTROS SUCESIVOS DEPENDIENTES

Hasta el momento, se ha supuesto que se verificaba $\xi_0 = 0$ y que solamente había transiciones $E_n \rightarrow E_{n+1}$ con probabilidad $P_{n,n+1} = 1$. En el seguro del automóvil, sin embargo, hace tiempo que se ha podido comprobar, por ejemplo, por parte de Fréchet (1), que los sucesivos siniestros no pueden considerarse independientes de los ocurridos en el primer año. El primero que ha utilizado las cadenas de Markov para el análisis del acaecimiento de siniestros del-automóvil ha sido, precisamente Fréchet, en el artículo reseñado. Las hipótesis de las que parte son las siguientes:

- (a) Existe una probabilidad de que un vehículo que ha tenido i siniestros en un año, tenga j siniestros en el curso del ejercicio siguiente. A dicha probabilidad de transición la representamos por P_{ij} .
- (b) Esta probabilidad es independiente del vehículo y del año considerado.

La matriz estocástica de transición será entonces:

$$M_1 = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{10} & \dots & P_{m0} \\ P_{01} & P_{11} & \dots & P_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{0m} & P_{1m} & \dots & P_{mm} \end{pmatrix}$$

que, junto con la distribución inicial $\{P_j(0)\}$, determina el comportamiento de la cadena de Markov.

Se puede considerar la probabilidad de que un vehículo que ha tenido i siniestros en el curso de un año tenga j siniestros en el curso de un ejercicio que tiene lugar n años después. Si

(1) Fréchet, M.: Essai d'une étude de succession de sinistres considérés comme process stochastiques. Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuariers Français n°27. Junio, 1959. Pag. 67-85.

se representa por P_{ij}^n a esta probabilidad, se tiene la matriz estocástica:

$$M_n = \begin{pmatrix} P_{00}^n & P_{10}^n & \dots & P_{m0}^n \\ P_{01}^n & P_{11}^n & \dots & P_{m1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{0m}^n & P_{1m}^n & \dots & P_{mm}^n \end{pmatrix} = M_1^n$$

Si el vector de probabilidades a priori es P_0 , el vector de probabilidades al cabo de n años será: $P_n = M_1^n P_0$.

Lo que presenta un mayor interés desde el punto de vista actuarial es el análisis del comportamiento asintótico de la matriz M_n , es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_1^n$.

Cuando la cadena es completamente ergódica, es decir, verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_1^n = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & \dots & P_0 \\ P_1 & P_1 & \dots & P_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_m & P_m & \dots & P_m \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$P_\infty = \begin{pmatrix} P_0 & P_0 & \dots & P_0 \\ P_1 & P_1 & \dots & P_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_m & P_m & \dots & P_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ \dots \\ P_m^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \dots \\ P_m \end{pmatrix}$$

es decir, independiente del estado inicial.

El teorema ergódico tiene la siguiente interpretación actuarial, dada por Vajda (1):

Cualquiera que sea la clasificación inicial de los conductores por clases, después de un número grande de años, la prima a satisfacer por cada uno es la misma para todos.

(1) Vajda, S.: Markov chains and the determination of fair premiums. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. III. Julio 1967. Pag. 265-268

En efecto, suponiendo que la prima viene dada por la media del número de siniestros, la prima a satisfacer después de n años sería:

$$(\pi_0^n, \pi_1^n, \dots, \pi_m^n) = (0, 1, \dots, m) M_1^n$$

que, en la hipótesis de cadena completamente ergódica, será:

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m) = (0, 1, \dots, m) \begin{pmatrix} P_0 & P_0 \dots & P_0 \\ P_1 & P_1 \dots & P_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ P_m & P_m \dots & P_m \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\pi_0 = \pi_1 = \dots = \pi_m = \sum_{r=0}^m r P_r$$

Esto implica la consideración de dos periodos es la sucesión de los años:

- (a) Los primeros años, donde se tienen probabilidades fluctuantes dadas por la sucesión de matrices (M_n) , que definen de alguna forma el régimen transitorio.
- (b) Después de un número determinado de años, se pasará al régimen permanente, con sus probabilidades estabilizadas.

El problema que se plantea es el de ver si se puede esperar que, al cabo de algunos años, se alcance el régimen permanente. En este sentido, las investigaciones de Franckx (1) han demostrado que la evolución al estado de equilibrio son bastante rápidas. En concreto, el profesor Franckx consideró, sobre el material de observación del que dispuso que el periodo de transición es de tres años aproximadamente. Cuando esto sucede, se tiene que las probabilidades de transición

$$P(\xi_t=j / \xi_{t-1}=i) = P_{ij}$$

(1) Franckx, Ed.: Théorie du Bonus. Consequences de l'étude de MR. le Professeur Fréchet. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. III. Abril 1960. Pag. 113-122

son independientes de t , y la cadena de Markov es homogénea.

Haciendo uso de los teoremas del cálculo de probabilidades, se tiene:

$$P_n(t) = P(\xi_t = n) = \sum_{j=0}^n P_j(0) P_{jn}^{(n)}$$

siendo

$$P_{jn}^{(n)} = \sum_k P_{jk} P_{kn}^{(n-1)}$$

II.2.2.- DISTRIBUCION DE LA CUANTIA DE LOS SINIESTROS

Analicemos la segunda de las distribuciones básicas que configuran el proceso de riesgo, la distribución de la cuantía de los siniestros. Acaecido un siniestro, éste dará lugar a una indemnización, cuya cuantía será aleatoria, dando lugar a una distribución de probabilidad que es preciso analizar. Como dicen Benktander y Segerdahl (1), "es una hipótesis básica en todas las investigaciones sobre la teoría del riesgo... que existe una distribución de los siniestros subyacente al proceso de riesgo. En otras palabras, si se produce un siniestro, existe una probabilidad $P(z)$, de que tal siniestro comporte una indemnización cuya cuantía exceda al valor de z ". El problema es encontrar, para cada caso, tal distribución de la cuantía de los siniestros, que se supone existente. Al establecimiento de los modelos más comunmente utilizados y análisis de los mismos se dedican las siguientes páginas.

En primer lugar, se impone una homogeneización de los riesgos, es decir, una clasificación de los riesgos en clases homogéneas. Para ello, conviene distinguir dos casos:

- a/ Seguros para los que existen sumas aseguradas, como es el caso del seguro de incendios.
- b/ Seguros para los que no existe suma asegurada alguna, cual es el caso, por ejemplo, de los seguros de responsabilidad civil con garantía máxima ilimitada.

En el caso primero, cuando existen sumas aseguradas que constituyen un límite máximo de indemnización para el asegurador, se impone:

- a/ Dentro de una división en clases más o menos arbitrarias, procurar que, en cada clase, las sumas aseguradas sean lo más homogéneas posibles.

(1) Benktander, Gunnar - Segerdahl, Carl-Otto: On the Analytical Representation of Claim Distributions with Special Reference to Excess of Loss Reinsurance. Comptes Rendus du XVI^e Congrès International d'Actuaries. Volumen 1. Pag. 626-648

b/ En muchos seguros nos encontramos con que los diferentes elementos tienen sumas aseguradas de distinta cuantía. En tal caso, es conveniente elaborar la distribución porcentual que nos habla de la probabilidad de una indemnización por cada peseta asegurada.

Como es sabido, en este tipo de seguros, la suma o capital asegurado puede no coincidir con el valor del interés asegurado, pudiéndose presentar, al relacionar ambas variables, los casos de infraseguro, seguro pleno y sobreseguro. Se presenta un caso de infraseguro cuando la suma asegurada es menor que el valor del interés asegurado. Procede en este caso la aplicación de la llamada regla proporcional, que supondrá, para el caso en que el siniestro sea total, una indemnización por el valor de la suma asegurada. Se presenta un caso de seguro pleno cuando el capital asegurado coincide con el valor del interés asegurado. Por último, se presenta un caso de sobreseguro cuando la suma asegurada es superior al valor del interés asegurado. En este caso, la indemnización será por el valor real del daño económico provocado por el siniestro, que tendrá como límite máximo (en los siniestros totales), el valor del interés asegurado.

Con la finalidad de calcular la prima como un porcentaje de la suma asegurada, vamos a elaborar la distribución porcentual, a la que antes se hizo referencia. Para ello, representando por S la suma asegurada y por I la indemnización correspondiente (previa aplicación de la regla proporcional), se define la siguiente variable estadística:

$$X = I/S$$

Es obvio que esta variable verificará las siguientes relaciones de acotación: $0 \leq X \leq 1$. Los valores observados de esta variable estadística nos permitirán elaborar el histograma, correspondiente a la distribución de frecuencias del fenómeno aleatorio que pretendemos modelizar en términos estocásticos. Se trata, por tanto, de definir el modelo de probabilidad que mejor se ajuste al histograma de frecuencias para cada tipo de seguro. Como es clásico en la estadística, procede presentar una serie de modelos de probabilidad que con mayor frecuencia se ajusten de la mejor forma a los distintos casos presentados. Esas dis-

tribuciones de probabilidad básicas son las que pasamos a continuación a definir y analizar, sobre la base de que reduciremos nuestro análisis a unas pocas, las más importantes en términos históricos, a efectos de no extender nuestro trabajo fuera de unos límites razonables.

II.2.2.1.- DISTRIBUCION CAUSAL

La distribución causal es el modelo probabilístico de un fenómeno determinista o no aleatorio (fenómeno que siempre se concreta en el mismo suceso). Tiene, por tanto, toda la masa de probabilidad concentrada en un punto.

La distribución causal tiene su ámbito de aplicación, dentro del campo actuarial, en los seguros de vida, en los cuales, al acaecimiento del siniestro, se satisface la suma asegurada con probabilidad uno. Sin embargo, en los riesgos que pueden dar lugar a indemnizaciones parciales, como es el caso de todos los seguros generales, la distribución carece de utilidad.

En lo sucesivo, trataremos de las distribuciones que más aplicación encuentran en los seguros no-vida.

II.2.2.2.- DISTRIBUCION GAMMA

La distribución gamma es una de las más importantes desde el punto de vista actuarial, como distribución de la cuantía de los siniestros, por ser de las que mejor se ajustan, en multiplicidad de casos, a la distribución de frecuencias representada por el histograma que anteriormente establecíamos.

En su forma más general, diremos que una variante ξ sigue una distribución gamma cuando, siendo continua, tiene por función de densidad:

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-\gamma}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \quad \text{con } x > \gamma$$

siendo α y β parámetros positivos, $\alpha > 0, \beta > 0$, γ un parámetro no negativo, $\gamma \geq 0$, que viene a expresar el origen respecto al cual se refieren los valores de la variable, tomando éstos valores a la derecha de dicho origen, $x > \gamma$. $\Gamma(\alpha)$ es la conocida integral euleriana de segunda especie

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

que es convergente (existe) para $\alpha > 0$. Tendremos ocasión de analizar relaciones referidas a esta función, pues ha merecido reciente atención de numerosos autores, que se ha plasmado en múltiples artículos en la literatura científica de nuestros días.

Son numerosos los autores que llaman distribución gamma "generalizada" a la que, siendo continua, tiene por función de densidad:

$$f(x; a, \alpha, \beta) = \frac{\beta a^{\alpha/\beta}}{\Gamma(\alpha/\beta)} x^{\alpha-1} e^{-ax\beta} \quad \text{con } x > 0, a > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

La distribución gamma generalizada tiene gran importancia en distintos campos, como el análisis de fiabilidad, y la analizaremos brevemente con posterioridad.

Si en la expresión de la función de densidad que hemos presentado anteriormente, hacemos $\gamma = 0$ y $1/\beta = c$, obtenemos

$$f(x; c, \alpha) = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-cx} \quad \text{para } x > 0, c > 0, \alpha > 0.$$

que es la expresión de la distribución gamma más comunmente utilizada. Se trata de una distribución del Tipo III de Pearson, como tendremos ocasión de poner de manifiesto.

Un caso particular de distribución gamma, del que tendremos ocasión de hablar, es el de la distribución gamma truncada por la derecha, a la que es común representar por la función de densidad:

$$f(x; a, \theta) = C \theta^{-a} x^{a-1} e^{-x/\theta} \quad \text{para } 0 < x \leq a, 0 < \theta < \infty$$

donde a es el punto de truncamiento de la distribución y C la constante que hace que la anterior función sea de densidad, es decir, tal que

$$C \int_0^a f(x; a, \theta) dx = 1$$

Si en la anterior expresión de la función de densidad de la distribución gamma hacemos $\alpha = 1$, obtendremos un caso particular importante, que tiene por función de densidad:

$$f(x;c) = c e^{-cx} \quad \text{para } x > 0, c > 0$$

A esta distribución, de importancia fundamental en la modelización de los fenómenos de espera, se la conoce comúnmente como distribución exponencial, si bien a veces ha sido llamada distribución gamma estandarizada o distribución exponencial negativa, o, como hace Benktander, exponencial generalizada, reservando el apelativo de exponencial para el caso particular en que $c = 1$, es decir, para $f(x) = e^{-x}$ con $x > 0$. Analizaremos con la suficiente detención esta distribución exponencial.

Definición de la distribución gamma

Como hemos indicado anteriormente, la expresión más comúnmente utilizada para la distribución gamma, y la de mayor aplicación en el campo actuarial, es la que la define como la distribución continua de una variante ξ que sólo toma valores reales positivos con función de densidad:

$$f(x;c,\alpha) = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-cx} \quad \text{para } x > 0, c > 0, \alpha > 0.$$

Se trata, evidentemente, de una auténtica función de densidad, puesto que es no negativa en todo su campo de definición y verifica:

$$\int_0^\infty f(x;c,\alpha) dx = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-cx} dx = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{c^\alpha} = 1.$$

El profesor Sixto Rios (1) introduce, de una manera natural, la distribución gamma, a partir de la función gamma (inte-

(1) Rios, Sixto: Métodos Estadísticos. Ed. Castillo. Quinta Edición, 1.967

gral euleriana de segunda especie), de la siguiente forma: Dado que la función gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

converge para todo $\alpha > 0$, la función $f(x; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}$, para

para $x > 0$, $\alpha > 0$ es una función de densidad. A la distribución correspondiente la llamaremos $\gamma(\alpha)$. Ahora bien, dado que el cambio de variable $x = cy$, $c > 0$, conduce a

$$\Gamma(\alpha) = c^{\alpha} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-cy} dy$$

relación que es válida para c complejo, $c = a+bi$ con $a > 0$, el cambio de variables aleatorias $\xi = c\eta$ definirá la función de densidad, correspondiente a la distribución de la variante η

$$f(x; c, \alpha) = \frac{c^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-cx} \quad \text{para } x > 0, c > 0, \alpha > 0.$$

A la distribución correspondiente la representa Ríos por $\gamma(\alpha, c)$, y es la que nosotros hemos empezado definiendo. Analicemos sus distintos elementos.

La distribución gamma como distribución del Tipo III de Pearson

Una idea intuitiva de la modelización propuesta por Pearson, consistente en expresar a las funciones de densidad de las distribuciones continuas más importantes como soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden la podemos encontrar en la distribución normal. Si en la función de densidad de una distribución $N(\mu; \sigma)$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

tomemos logaritmos neperianos, tendremos:

$$Lf(x) = -L(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

que, derivado, nos define la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x)$$

Así pues, la función de densidad $f(x)$ de la distribución $N(\mu; \sigma)$ aparece como solución de dicha ecuación diferencial.

Generalizando este proceso, Pearson define la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} f(x)$$

donde a , b_0 , b_1 y b_2 son constantes y $f(x)$ expresa una función de densidad. Se verifica que son soluciones particulares de dicha ecuación diferencial muchas de las funciones de densidad de las distribuciones continuas más importantes, tales como la propia normal, la gamma, la exponencial, la beta, la χ^2 , la t de Student, la distribución de la razón de Fisher e^{2z} , la de Pareto, etc. Cualquier distribución obtenida a partir de una de éstas, por transformación lineal de la variable aleatoria, satisfará, desde luego, una ecuación de la misma forma. Se demuestra que las constantes de la ecuación pueden expresarse en función de los cuatro primeros momentos de la distribución de probabilidad, cuando éstos sean finitos.

Las soluciones de la ecuación se clasifican de acuerdo con la naturaleza de las raíces del polinomio denominador. De esta forma, se obtienen los XII tipos de soluciones que clasificó Pearson. En concreto, decimos que una distribución es del Tipo III de Pearson si se verifica que: $b_2 = 0$, $b_1 \neq 0$, es decir, si la ecuación diferencial de Pearson presenta la forma:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x} f(x)$$

Efectuando el cociente de polinomios, nos resulta:

$$\frac{d \log f(x)}{dx} = \frac{1}{b_1} + \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right) \frac{1}{b_0 + b_1 x}$$

que, integrada, y llamando

$$\frac{1}{b_1} \left(a - \frac{b_0}{b_1}\right) = m$$

nos define la solución general:

$$f(x) = K e^{x/b_1} (b_0 + b_1 x)^m$$

característica de las funciones de densidad de las distribuciones del Tipo III de Pearson. Cramér (1) expresa a dicha solución general de la siguiente forma: $f(x) = A(x-\mu)^{\lambda-1} e^{-\alpha(x-\mu)}$ con $x > \mu$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, que viene a ser equivalente a la anteriormente obtenida, sin más que hacer en ella $\mu = -b_0$, $\lambda = m+1$, $\alpha = -1$ y $A = K e^{-b_0}$, haciendo en ésta $b_1 = 1$. Tanto la constante A en la expresión de Cramér como la K en el caso anterior se determinan con la condición de que $f(x)$ sea una auténtica función de densidad. La distribución χ^2 es el clásico ejemplo de distribución del Tipo III de Pearson, por pertenecer claramente a estas familias de curvas.

Pues bien, si en la anterior solución general hacemos $b_0 = 0$, $b_1 = -1/c$, $m = \alpha-1$ y $K = (-1)^{\alpha-1} c^{2\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, o bien en la solución general expresada por Cramér hacemos $\mu = 0$, $\alpha = c$, $\lambda = \alpha$ y $A = c^\alpha/\Gamma(\alpha)$, obtenemos, obviamente, la función de densidad de la distribución gamma, que resulta ser así una distribución del Tipo III de Pearson.

Elementos fundamentales de la distribución gamma

Función característica

Sea ξ una variante $\gamma(\alpha, c)$. Su función característica será:

$$\begin{aligned}\phi_\xi(t) &= \int_0^\infty e^{itx} \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-cx} x^{\alpha-1} dx = \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(c-it)x} dx = \\ &= \frac{c^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(c-it)^\alpha} = \left(1 - \frac{it}{c}\right)^{-\alpha}\end{aligned}$$

Momento de orden K

La derivada k-ésima de esta función característica será:

$$\phi_\xi^{(k)}(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{c^k} i^k \left(1 - \frac{it}{c}\right)^{-(\alpha+k)}$$

(1) Cramér, Harald: Métodos Matemáticos de Estadística. Aguilar. Cuarta Edición, 1.968. Pag. 287.

de donde el momento de orden k será:

$$\alpha_k = \frac{\phi_{\xi}^{(k)}(0)}{i^k} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{c^k}$$

Los parámetros fundamentales de la distribución serán por tanto:

$$\text{Valor probable: } \alpha_1 = E(\xi) = \frac{\alpha}{c}$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = v(\xi) = \frac{\alpha}{c^2}, \text{ puesto que } \alpha_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{c^2}$$

En el caso de que $c = 1$, es decir, para la distribución $\gamma(\alpha, 1)$, a la que Ríos llama $\gamma(\alpha)$, ambos parámetros fundamentales coincidirán, $\alpha_1 = \sigma^2 = p$.

Semivarianza

Una medida de dispersión considerada por Markowitz (1) más adecuada a los análisis del riesgo es la semivarianza, hasta el punto de que afirma dicho autor: "Los análisis basados en la semivarianza tienden a producir mejores carteras que los basados en la varianza". La semivarianza la representa Berliner (2) por V_+ , y se define por:

$$V_+ = \int_E^{\infty} (x-E)^2 dF(x)$$

donde $F(x)$ es la función de distribución, en nuestro caso de la cuantía de los siniestros en la cartera, y E el valor probable de dicha distribución. Nos limitamos en la semivarianza, por tanto, a considerar los valores de la variable que exceden al valor probable de la distribución.

Procede Berliner al establecimiento de las propiedades fundamentales de la semivarianza y a su determinación en los casos de las distribuciones fundamentales. Por ejemplo, como es obvio, para la distribución normal, $V_+ = \sigma^2/2$, siendo $V_+/V = 1/2$, expresión ésta que es común a cualquier distribución simétrica.

(1) Markowitz, H.: Portfolio Selection. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University. 1959. Pag. 188-201

(2) Berliner, B.: A Risk Measure Alternative to the Variance. The Astin Bulletin, Vol. IX, Parts 1 and 2. Enero 1977. Pag. 42-58

Para el caso de la distribución gamma que analizamos, la semivarianza resulta ser:

$$V_+ = \frac{1}{c^2 \Gamma(\alpha)} \{e^{-\alpha} \alpha^{\alpha} + \Gamma(\alpha+1) - \alpha \Gamma_{\alpha}(\alpha)\}$$

teniéndose entonces:

$$\frac{V_+}{V} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \{e^{-\alpha} \alpha^{\alpha-1} + \Gamma(\alpha) - \Gamma_{\alpha}(\alpha)\}$$

que depende únicamente de α , pero no de c . Se demuestra que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{V_+}{V} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{V_+}{V} = 1$$

con lo que V_+/V es función suavemente decreciente de α , suavidad que se intensifica a partir de 2, $\alpha \geq 2$.

Convolución de una distribución gamma

Los análisis de convolución son básicos en la teoría del riesgo, según tuvimos ocasión de ver al analizar el proceso de riesgo e insistiremos precisamente al hablar de la distribución del daño total. Diremos, únicamente, que son el elemento fundamental en la determinación de dicha distribución. Pues bien, la distribución gamma goza de la siguiente propiedad fundamental: La convolución n -ésima de la distribución $\gamma(\alpha, c)$ es también una distribución gamma, de parámetros $\gamma(n\alpha, c)$. En efecto, sean n variantes gamma $\gamma(\alpha_i, c)$, $i = 1, 2, \dots, n$, estocásticamente independientes entre sí, y sea la variante suma η . La función característica de dicha variante será:

$$\phi_{\eta}(t) = \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{it}{c}\right)^{-\alpha_r} = \left(1 - \frac{it}{c}\right)^{-\sum_{r=1}^n \alpha_r} = \left(1 - \frac{it}{c}\right)^{-\alpha} \quad \text{con } \alpha = \sum_{r=1}^n \alpha_r$$

La distribución de η será entonces gamma con parámetros $(\sum_{r=1}^n \alpha_r, c)$. Como consecuencia de ello se obtiene el teorema anteriormente anunciado.

También se verifica que si una variante ξ sigue una distribución $\gamma(\alpha, c)$, la variante $\eta = \lambda \xi$ también sigue una distribución gamma, de parámetros $\gamma(\alpha, c/\lambda)$. En efecto, la función característica de η será:

$$\phi_{\eta}(t) = \phi_{\xi}(\lambda t) = \left(1 - \frac{i\lambda t}{c}\right)^{-\alpha} = \left(1 - \frac{it}{c/\lambda}\right)^{-\alpha} \quad \text{c.q.d.}$$

Relaciones de la distribución gamma con otras distribuciones

La distribución gamma se encuentra relacionada con numerosas distribuciones, de entre las que consideraremos las siguientes:

a/ En primer lugar, se encuentra relacionada, de manera natural, con la distribución χ^2 de Pearson, puesto que ambas son del Tipo III de Pearson. En efecto, por lo pronto, el recorrido de ambas variantes es el mismo, $(0, +\infty)$. La χ^2 de Pearson con n grados de libertad tiene como función de densidad:

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} \quad \text{para } x > 0$$

Evidentemente, esta función de densidad coincide con la de una distribución $\gamma(n/2, 1/2)$, es decir, cuando el número de grados de libertad en la distribución χ^2 es $n = 2\alpha$. Podemos decir entonces que la gamma es un caso particular de distribución χ^2 . Incluso la distribución χ^2 se define como una suma de cuadrados de variantes normales, y la distribución gamma está relacionada con el cuadrado de una variante normal, de la siguiente forma:

b/ Sea ξ una variante cuya distribución es $N(0, 1)$, y sea $\eta = \xi^2$. La distribución de η tendrá como función de densidad:

$$\phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \{f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\}$$

y siendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, resulta:

$$\phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} x^{1/2-1}$$

que es la función de densidad de una distribución gamma de parámetros: $\gamma(1/2; 1/2)$.

c/ La distribución gamma también se encuentra relacionada con la distribución uniforme, de la siguiente forma: Si ξ es una variante uniforme en el intervalo $(0,1)$, la variante $\eta = -\log \xi$ sigue una distribución gamma de parámetros $\gamma(1,1)$.

d/ La distribución gamma también se encuentra relacionada con la distribución de Laplace o de los errores, y con la distribución de Pareto. Con ésta última distribución, la relación es especialmente intensa con la distribución exponencial, que es la distribución gamma para el caso en que $\alpha = 1$, es decir, $\gamma(1,c)$, cuya función de densidad es: $f(x,c) = c e^{-cx}$ para $x > 0$, $c > 0$. Esta relación entre la distribución de Pareto y la distribución exponencial se pone de manifiesto a través de una serie de teoremas de caracterización de ambas, como tendremos ocasión de poner de manifiesto posteriormente.

e/ De todas formas, la relación más importante es con la distribución de Poisson, en la teoría de los llamados fenómenos de espera. Por lo pronto, existe una relación inmediata entre la distribución $\gamma(\alpha,1)$, o simplemente $\gamma(\alpha)$, cuando α es un número entero positivo, y la distribución de Poisson. Esta relación no hace referencia alguna, por lo menos a primera vista, a los fenómenos de espera, pero resulta de gran utilidad, pues permite expresar a la función de distribución de la distribución gamma $\gamma(\alpha)$ en términos de la función de distribución de la distribución de Poisson, con la consiguiente posibilidad de utilización de tablas de ésta para la distribución gamma. La relación es la siguiente: Sea ξ , una variante cuya distribución es $\gamma(n+1)$, siendo n un número entero positivo, es decir, con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x}, \text{ para } 0 \leq x < \infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si η es una variante de Poisson con parámetro λ , entonces verifica: $P(\xi \geq \lambda) = P(\eta \leq n)$, es decir, $1 - F_{\xi}(\lambda) = F_{\eta}(n)$ (por ser la distribución de ξ continua), con lo que aparecen relacionadas ambas funciones de distribución. La relación es sencilla de demostrar. En efecto, se verifica:

$$F_{\eta}(n) = P(\eta \leq n) = \sum_{r=0}^n \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

$$F_{\xi}(\lambda) = \frac{1}{n!} \int_0^{\lambda} x^n e^{-x} dx$$

e integrando sucesivamente por partes, tendremos:

$$\begin{aligned} F_{\xi}(\lambda) &= \frac{1}{n!} \{-\lambda^n e^{-\lambda} + n \int_0^{\lambda} x^{n-1} e^{-x} dx\} = \frac{1}{n!} \{-\lambda^n e^{-\lambda} - n\lambda^{n-1} e^{-\lambda} + \\ &+ n(n-1) \int_0^{\lambda} x^{n-2} e^{-x} dx\} = \dots = \frac{1}{n!} \{-e^{-\lambda} (\lambda^n + n\lambda^{n-1} + n(n-1)\lambda^{n-2} + \\ &+ \dots + n!)\} + n! \int_0^{\lambda} e^{-x} dx = 1 - e^{-\lambda} \sum_{r=0}^n \frac{\lambda^r}{r!} = 1 - F_{\eta}(n) \end{aligned}$$

Es clara, a la vez que práctica, entonces esta relación. Pero lo que interesa más, desde un punto de vista de metodología estadística, es la relación existente entre la distribución gamma general, $\gamma(\alpha, c)$, cuando α es entero positivo, y la distribución de Poisson, como distribución del número de sucesos en un proceso estocástico, correspondiente a un fenómeno de espera. En un fenómeno de espera, tal como el del número de llamadas telefónicas recibidas en una centralita, número de automóviles ante una caseta de cobro en una autopista de peaje, número de siniestros en una determinada cartera, etc, hay dos variantes fundamentales, íntimamente relacionadas y un parámetro básico: las variantes son el número de éxitos o acaecimientos del suceso considerado en un espacio de tiempo predeterminado, por una parte y el tiempo transcurrido hasta el acaecimiento del r -ésimo suceso por otra. El parámetro básico es la tasa de acaecimiento del suceso por unidad de tiempo (en nuestro caso actuarial, número medio de siniestros por unidad de tiempo). Pues bien, vamos a ver cómo si la distribución de la variante "número de sucesos" es de Poisson, la variante "tiempo de espera" se distribuye como una gamma de parámetros α entero positivo (tiempo de espera para el acaecimiento del α -ésimo suceso). Sea el número de sucesos en un intervalo temporal $(0, t)$ distribuido conforme a una distribución de Poisson de parámetro λt , es decir, con número medio por unidad de tiempo λ . A la probabilidad de que en $(0, t)$ se produzcan k sucesos la representaremos por $P_k(t)$ y será, según la hipótesis formulada,

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Vamos a determinar la ley de probabilidad de la variante "tiempo de espera para el r-ésimo suceso", es decir, la variante cuyos valores son los del tiempo de ocurrencia del r-ésimo suceso. Sea $F_r(t)$ la función de distribución de dicha variante, es decir, la probabilidad de que el tiempo de ocurrencia del r-ésimo suceso sea menor o igual que t . Entonces, $1-F_r(t)$ expresa la probabilidad de que el suceso r-ésimo tenga lugar en un instante temporal posterior a t , lo que es equivalente a afirmar que, en el intervalo $(0,t)$, se produzcan menos de r sucesos. En consecuencia, y puesto que el número de sucesos en $(0,t)$ sigue la ley de Poisson, tendremos:

$$1-F_r(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} (\lambda t)^k e^{-\lambda t}$$

derivando los dos miembros de esta ecuación respecto a t , tendremos:

$$\begin{aligned} -f_r(t) &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{k}{k!} \lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda}{k!} k t^k e^{-\lambda t} = \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(k-1)!} \lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} t^k e^{-\lambda t} = \\ &= \sum_{k=0}^{r-2} \frac{1}{k!} \lambda^{k+1} t^k e^{-\lambda t} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \lambda^{k+1} t^k e^{-\lambda t} = - \frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Es decir:

$$f_r(t) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t}$$

que es la función de densidad de una distribución gamma de parámetros $\gamma(r, \lambda)$, con r entero positivo. Si $r = 1$ (primer suceso), la distribución es exponencial. Así pues, se produce la siguiente relación importante entre las distribuciones de Poisson, exponencial y gamma: En un proceso estocástico de Poisson, de parámetro λt , se verifica:

- La variable aleatoria "número de ocurrencias de un suceso S en un intervalo de tiempo $(0,t)$ determinado" sigue una ley de Poisson de parámetro λt .
- La variable aleatoria "tiempo transcurrido hasta el primer acaecimiento del suceso s " sigue la ley exponencial de parámetro λ , $\gamma(1, \lambda)$.

c/ La variable aleatoria "tiempo transcurrido hasta la k-ésima ocurrencia del suceso S" se distribuye conforme a una ley gamma de parámetros k y λ , $\gamma(k, \lambda)$.

Cálculo aproximado y acotaciones de la función gamma

La función gamma, $\Gamma(p)$, ha sido objeto de múltiples estudios sobre el cálculo aproximado de la misma y de teoremas de acotación. Al margen de la conocida fórmula de Stirling para su cálculo aproximado, que, como se sabe, es:

$$\log \Gamma(p) = (p - \frac{1}{2}) \log p - p + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{12p} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)$$

cuyo famoso corolario es:

$$n! = \Gamma(n+1) \sim (n/e)^n \sqrt{2n\pi}$$

y de la no menos conocida fórmula de Legendre para la duplicación de la función gamma, que es:

$$\Gamma(2t) = \frac{2^{2t-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(t) \Gamma(t+1/2)$$

dos tipos de relaciones referidos a la función gamma han merecido la atención de numerosos autores en las últimas décadas, lo que se ha traducido en un importante bagaje de artículos sobre ellas en las revistas especializadas. Nos referimos a las relaciones $\Gamma(v) \Gamma(v+2\alpha) / \Gamma^2(v+\alpha)$ y $\Gamma(n+1) / \Gamma(n+s)$. Respecto a la primera, Gurland (1) obtuvo la desigualdad:

$$\frac{\Gamma(v) \Gamma(v+2\alpha)}{\Gamma^2(v+\alpha)} > 1 + \frac{\alpha^2}{v} \quad \text{con } \alpha+v>0, \alpha \neq 0, 1.$$

Posteriormente, Boyd (2) ha demostrado la desigualdad de Gurland.

(1) Gurland, J.: An Inequality Satisfied by the Gamma Function. Skandinavisk Aktuarietidskrift. 1.956. Pag. 171-172

(2) Boyd, A.V.: Gurland's Inequality for the Gamma Function. Skand. Aktuar. 1.960. Pag. 134-135

Gokhale (1), por su parte, ha obtenido la relación:

$$\frac{\Gamma(v) \Gamma(v+2\alpha)}{\Gamma^2(v+\alpha)} > 1 + \frac{\alpha^2(v-2)}{(v+\alpha-1)^2} \quad \text{con } v+2\alpha > 0, v > 2, \alpha \neq 0, 1.$$

Esta acotación de Gokhale es mejor que la de Gruland si $-v/2 < \alpha < 0$ (v grande), es decir, sólo para valores negativos de α , siendo la de Gruland más potente para valores positivos de α . Posteriormente, Chakravarty (2) ha obtenido la desigualdad:

$$\frac{\Gamma(v) \Gamma(v+2\alpha)}{\Gamma^2(v+\alpha)} > 1 + \frac{\alpha^2(v+\alpha)^2}{v(v+1)(v+3)} \quad \text{para } v+2\alpha > 0, \alpha \neq 0.$$

Delimitando el campo de variación de α a la semirrecta abierta $(-v/2, \infty)$, se puede afirmar que la desigualdad de Gokhale es la mejor para el campo $-v/2 < \alpha < -(v-1) + \sqrt{v(v-2)}$, la de Gruland es preferible en el campo $-(v-1) + \sqrt{v(v-2)} < \alpha < \{\sqrt{(v+1)(v+3)} - v\}$ y la de Chakravarty, por último, resulta la mejor de las tres para la semirrecta abierta $\alpha > \{\sqrt{(v+1)(v+3)} - v\}$.

Rao (3) y (4), por su parte, ha obtenido nuevas desigualdades. En concreto, en (3) se obtiene:

$$\frac{\Gamma(v) \Gamma(v+2\alpha)}{\Gamma^2(v+\alpha)} \geq 1 + \frac{\alpha^2}{v} + \frac{\alpha^2(\alpha-1)^2}{2v(v+1)} \quad \text{para } \alpha > -\frac{v}{2},$$

que es claramente superior a la desigualdad de Gruland. En su trabajo en colaboración con Garg (4), obtiene la acotación:

- (1) Gokhale, D.V.: On an Inequality for the Gamma Function. Skand. Aktuar. 1.962. Pag. 213-215.
- (2) Chakravarty, P.P.: On Certain Inequalities Connected with Gamma Function. Skand. Aktuar. 1969. n°1-2. Pag. 20-23
- (3) Rao, B.Raja: An Improved Inequality Satisfied by the Gamma Function. Skand. Aktuar. 1969. n°1-2. Pag. 78-83.
- (4) Rao, B.Raja-Garg, M.L.: An Inequality for the Gamma Function Using the Analogue of Bhattacharyya's Inequality. Skand. Aktuar. 1969. n°1-2. Pag. 71-77

$$\frac{\Gamma(v) \Gamma(v+2\alpha)}{\Gamma^2(v+\alpha)} \geq 1 + \frac{\alpha^2(v-2)}{(v+\alpha-1)^2} + \frac{\alpha^2(\alpha+1)^2(v-1)(v-4)}{2(v+\alpha-1)^2(v+\alpha-2)^2} \quad \text{para } v > 4,$$

que resulta ser la mejor de todas ellas, superior sin duda a la de Gokhale. Kemp (1), en un trabajo más reciente, compara estas distintas desigualdades y las analiza en función de los valores del parámetro α .

La otra relación que ha merecido la atención de los investigadores, como concretamente de Gautschi, Erber y de Rao Uppuluri (2) es $\Gamma(n+1)/\Gamma(n+s)$ con $n > 0$ y $0 \leq s \leq 1$. Rao Uppuluri, en concreto, obtiene la acotación:

$$n^{1-s} \leq \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+s)} \leq (n+s)^{1-s}$$

y siguiendo la pauta de Erber, mediante iteraciones sucesivas, llega a una mejor acotación superior de la relación, que no podemos dada su complejidad formal. Otras acotaciones sobre la misma relación han sido establecidas por Shanbhag (3) a través de una serie de teoremas.

Trabajos sobre la distribución gamma

Antes de pasar a analizar casos particulares de distribuciones gamma, tales como la distribución gamma generalizada, la distribución exponencial, etc., reseñemos muy brevemente algunos trabajos más o menos recientes sobre esta distribución, al margen de los que ya se han ido presentando a lo largo del estudio realizado sobre la misma.

-
- (1) Kemp, Adrienne W.: On Gamma Function Inequalities. Skand. Aktuar. 1.973 n°2. Pag. 65-69
- (2) Rao Uppuluri, V.R.: A Stronger Version of Gautschi's Inequality Satisfied by the Gamma Function. Skand. Aktuar. 1.964. Häft 1-2 Pag. 51-52
- (3) Shanbhag, D.N.: On Some Inequalities Satisfied by the Gamma Function Skand. Aktuar. 1.967. Häft 1-2. Pag. 45-49

Respecto al apartado de la caracterización de la distribución gamma, son importantes los trabajos de Hogg (1) y Lukacs (2) en los que estos autores han aportado teoremas de caracterización de la distribución gamma.

Bondensson (3), por su parte, ha analizado la divisibilidad infinita de potencias de una distribución gamma y de las distribuciones normales generalizadas.

Por último, Seal (4), siguiendo la pauta de los trabajos de Bohman y Esscher, ha utilizado la distribución gamma para establecer aproximaciones a la distribución del daño total $F(x,t)$, y comparar dichas aproximaciones con las aportadas por el método de aproximación NP (Normal Power), del que tendremos ocasión de hablar al analizar la distribución del daño total.

Distribución gamma generalizada

La distribución gamma generalizada es una distribución continua que tiene por función de densidad:

$$f(x;a,\alpha,\beta) = \frac{\beta a^{\alpha/\beta}}{\Gamma(\alpha/\beta)} x^{\alpha-1} e^{-ax\beta} \quad \text{con } x>0, a>0, \alpha>0, \beta>0.$$

-
- (1) Hogg, R.V.: On Ratios of Certain Algebraic Forms. Ann Math. Statst. n°22 1.951. Pag. 567-572
- (2) Lukacs, E.: A Characterization of the Gamma Distribution. Ann. Math. Statist. n°26. 1.955. Pag. 319-324.
- (3) Bondesson, Lennart: On Infinite Divisibility of Powers of a Gamma Variable. Scandinavian Actuarial Journal. 1978. Pag. 48-61
- (4) Seal, Hilary L.: Approximations to Risk Theory's $F(x,t)$ by Means of the Gamma Distribution. The Astin Bulletin. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero 1977. Pag. 213-218

La distribución gamma generalizada tiene una extraordinaria importancia en el campo del Análisis de Fiabilidad y otros. Las distribuciones gamma, de Weibull, de Raleigh y la exponencial llamada con frecuencia exponencial negativa, son, entre otros, casos particulares de la distribución gamma generalizada. Amoroso y D'Addario, por ejemplo, la utilizaron para analizar las distribuciones de ingresos. Rogers la ha utilizado para obtener las distribuciones exactas de algunos contrastes multivariantes. Stacy también ha discutido problemas relacionados con ella. Mathai obtiene la distribución exacta de la variante $Y = (X_1 X_2 \dots X_m / X_{m+1} X_k)$ cuando $X_1 \dots X_k$ son independientes y distribuidas como una gamma generalizada. En concreto, analiza el caso en que $(X_1 \dots X_k)$ sea una muestra aleatoria simple de tamaño k procedente de una distribución gamma generalizada.

En un reciente y extenso trabajo, Bondensson analiza las convoluciones de distribuciones gamma generalizadas. Para ello, sigue la pauta marcada por los trabajos de Thorin. Bondensson introduce y analiza las convoluciones binomiales negativas generalizadas (GNBC) y establece la existencia de una correspondencia biunívoca entre dichas convoluciones y las gamma generalizadas, lo que permite estudiar éstas a través de aquéllas. De esta forma, obtiene interesantes resultados para las convoluciones gamma generalizadas.

Distribución gamma truncada

Muchas de las investigaciones desarrolladas en el curso de los análisis científicos se producen a partir de muestras provenientes de poblaciones incompletas, y en este contexto la distribución gamma truncada por la derecha ha encontrado aplicación en muy diversos campos. La distribución gamma truncada por la derecha es una distribución continua cuya función de densidad es:

$$f(x; \alpha, c) = K c^\alpha x^{\alpha-1} e^{-cx} \quad \text{para } 0 < x \leq a, \quad 0 < c < \infty, \quad 0 < \alpha < \infty$$

donde a es el punto de truncamiento de la distribución y K la constante multiplicativa que hace que la anterior función sea de densidad, es decir, tal que:

$$K c^\alpha \int_0^a x^{\alpha-1} e^{-cx} dx = 1.$$

Son numerosos los artículos que han tratado de la estimación de parámetros en esta distribución, entre los que cabe destacar los de Cohen, Chapman, Des Raj, Holla, etc., que reseñamos en la sección bibliográfica. Mas recientemente, Baikunth Nath (1) ha presentado en un trabajo la estimación insesgada de mínima varianza (MVU) de la función de fiabilidad asociada a una distribución gamma truncada por la derecha, según el método de estimación iniciado y desarrollado por Basu (2).

Distribución exponencial

La distribución exponencial, denominada frecuentemente distribución exponencial negativa, es un caso particular de distribución gamma. Es la distribución gamma $\gamma(1,c)$, según la terminología que venimos empleando, es decir, la distribución gamma en la que $\alpha = 1$, teniendo por tanto por función de densidad:

$$f(x,c) = c e^{-cx} \quad \text{para } x > 0, c > 0.$$

Como se dijo anteriormente, es la distribución de probabilidad de la variante "tiempo transcurrido hasta el primer acaecimiento del suceso s" cuando la sucesión de sucesos es un proceso de Poisson de parámetro ct .

Los elementos fundamentales de esta distribución serán:

Función de distribución:

$$F(x) = \int_0^x c e^{-cu} du = 1 - e^{-cx}$$

Función característica:

$$\phi_{\xi}(t) = \int_0^{\infty} c e^{-(c-it)x} dx = \left(1 - \frac{it}{c}\right)^{-1}$$

(1) Baikunth Nath, G.: Unbiased Estimates of Reliability for the Truncated Gamma Distribution. S.A.J. 1.975. Pag. 181-186.

(2) Basu, A.P.: Estimates of Reliability for Some Distributions Useful in Life Testing. Technometrics nº6. 1964. Pag. 215-219.

Momentos fundamentales:

Valor probable: $E(\xi) = \int_0^{\infty} cxe^{-cx} dx = \frac{1}{c}\Gamma(2) = 1/c$

$$E(\xi^2) = \int_0^{\infty} cx^2 e^{-cx} dx = \frac{1}{c^2}\Gamma(3) = 2/c^2$$

Varianza: $V(\xi) = 1/c^2$

Semivarianza: $V_+ = \int_0^{\infty} (x-E)^2 dF(x) = \int_{1/c}^{\infty} (x-1/c)^2 ce^{-cx} dx = 2/ec^2$

Estimación del parámetro c

Estimemos el parámetro c de la distribución exponencial por el método de la máxima verosimilitud. Dada una muestra aleatoria simple (x_1, x_2, \dots, x_n) de tamaño n, la función de verosimilitud será:

$$L(X, c) = \prod_{r=1}^n c e^{-cx_r} = c^n e^{-c \sum x_r}$$

y la segunda función de verosimilitud muestral será:

$$l(X, c) = \log L(X, c) = n \log c - c \sum x_r$$

$$\frac{dl}{dc} = \frac{n}{c} - \sum x_r = 0$$

luego el estimador por máxima verosimilitud del parámetro c será:

$$c^* = \frac{n}{\sum x_r} = 1/\bar{X}$$

el inverso de la media muestral (que no puede ser nula si la distribución es exponencial). Este estimador también lo es por momentos, según el método de Pearson. En efecto,

$$E(\xi) = \frac{1}{c} = \bar{X} \quad \text{luego} \quad c^* = 1/\bar{X}.$$

Ajuste empírico de la distribución exponencial

Según acabamos de ver, la función de distribución de la distribución exponencial es:

$$F(x) = 1 - e^{-cx} \quad \text{con } x > 0, c > 0.$$

A partir de esta expresión es fácil establecer una regla de ajuste empírico o gráfico a dicha distribución. En efecto, si tomamos logaritmos naturales, resulta:

$$\log \{1-F(x)\} = -cx$$

Esto quiere decir que la función $\log \{1-F(x)\}$ debe de ser lineal con coeficiente angular negativo, si realmente se trata de una distribución exponencial. Por tanto, se puede establecer una regla de ajuste gráfico a esta distribución de la siguiente forma: Se toman los valores observados x_i de la variable y, a partir de la distribución de frecuencias, se puede proceder al cálculo de los $1-F(x_i)$, formándose los pares de números reales $\{x_i; 1-F(x_i)\}$. Se representan dichos pares de valores en un papel semilogarítmico (eje de abscisas, X; eje de ordenadas, log Y) y si resultan estar razonablemente alineados, se puede concluir que la distribución es exponencial. El valor del parámetro c se estima entonces como pendiente angular de la recta obtenida. Se trata de un método aproximado, por lo que lo denominamos ajuste empírico o gráfico a la distribución exponencial, sin que este ajuste cuantifique probabilidades de error de tipo alguno.

Caracterización de la distribución exponencial

Son numerosos los trabajos en la literatura científica que han tratado de encontrar teoremas y propiedades de caracterización de la distribución exponencial, como así de la distribución gamma, de la de Pareto, etc.. Entre esos trabajos merecen destacarse los de Ferguson, (que vamos a reseñar en la sección bibliográfica) Benktander y Segerdahl (1) han aportado un importante teorema de caracterización sobre la distribución exponencial. Dada la función de distribución $P(x)$ de la cuantía de un siniestro, definen la función complementaria $H(x) = 1-P(x)$ y la función $m(x)$ como:

(1) Benktander, Gunnar- Segerdahl, Carl- Otto: Obra citada. Pag. 630

$$m(x) = \frac{\int_x^{\infty} (z-x)dP(z)}{\int_x^{\infty} dP(z)}, \text{ verificandose que } m(x) = \frac{\int_x^{\infty} H(z)dz}{H(x)}$$

Pues bien, demuestran estos autores que $m(x)$ es una constante para todo $x \geq 0$ si y sólo si la función de distribución de cuantía de un siniestro es exponencial negativa, es decir, $H(x) = e^{-kx}$ con $x > 0$, k constante. Sobre este tema, ampliándolo y encontrando interpretaciones, ha vuelto recientemente Taylor (1). Así mismo, Benktander y Segerdahl han procedido, en el trabajo reseñado, al cálculo de $m(x)$, entre otras distribuciones, para la gamma, encontrando expresiones de interés para el reaseguro de exceso de pérdidas.

En un condensado trabajo sobre la caracterización de una distribución de Pareto, al que nos referiremos al tratar de esta distribución, Samanta (2) ha demostrado un teorema de relación entre la distribución de Pareto y la distribución exponencial, mediante una simple transformación, que nos permite afirmar que todo teorema de caracterización de la distribución exponencial puede ser utilizado para caracterizar a la distribución de Pareto y viceversa. Recoge entonces Samanta los dos siguientes teoremas de caracterización de la distribución exponencial:

"Sean $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_N$ los elementos ordenados de una muestra aleatoria de tamaño $N(N \geq 2)$, procedente de una población con función de distribución $F(x-\theta)$, donde F se supone que es continua por la derecha, $F(x-\theta) = 0$ si $x \leq \theta$, y θ es un parámetro de situación. Entonces se verifica:

Teorema 1: Una condición necesaria y suficiente para que $F(x) = 1 - e^{-ax}$ para algún $a > 0$ es que el vector de variables aleatorias $(X_2 - X_1, X_3 - X_1, \dots, X_N - X_1)$ y X_1 sean estocásticamente independientes.

(1) Taylor, G.C.: The Negative Exponential Distribution and Average Excess Claim Size. The Astin Bulletin. Vol. 10, Part. 3. Diciembre, 1979. Pag. 303-304

(2) Samanta, M.: Characterisation of the Pareto Distribution. Skand. Aktuar. 1972. nº2. Pag. 191-192

Teorema 2: Una condición necesaria y suficiente para que $F(x) = 1 - e^{-ax}$ para algún $a > 0$ es que las variables aleatorias $X_{j+1} - X_j$ ($1 \leq j \leq N-1$) y X_i ($i \leq j$) sean estocásticamente independientes". Estos teoremas ya los había propuesto y demostrado Govindarajulu (1), quien aporta en el trabajo que reseñamos interesantes corolarios a los mismos, que permiten una más completa caracterización de distribuciones exponenciales.

Contraste de hipótesis sobre el parámetro de situación en una distribución exponencial

Con frecuencia, se introduce un cambio de origen en la variante exponencial, que, en gran número de trabajos, es presentada a través de la función de densidad:

$$f(t; G, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t-G}{\theta}} \quad \text{para } t > G, \theta > 0$$

El nuevo origen de la variante, G es el llamado "parámetro de situación", al que Dubey (2) y (3) denomina "tiempo de garantía" de la distribución. θ es el parámetro de escala.

Un aspecto de esta distribución que ha merecido la atención de numerosos investigadores ha sido la elaboración de contrastes de hipótesis sobre el valor del parámetro de situación G . En este sentido, destacan los trabajos de Carlson, incluido en la sección bibliográfica, y de Dubey, anteriormente reseñado. En el último de éstos, Dubey investiga las propiedades del estadístico $S = (t_a - G_0)/(t_b - t_a)$, donde $t_1 \leq \dots \leq t_a \leq \dots \leq t_b \leq \dots \leq t_n$ es una muestra aleatoria ordenada procedente de una población con dis-

(1) Govindarajulu, Zakkula: Characterization of the Exponential and Power Distributions. Skand. Aktuar. 1966. Häft 3-4
Pag. 132-136

(2) Dubey, Satya D.: A Simple Test Function for Guarantee Time Associated with the Exponential Failure Law. Skand. Aktuar. 1962. Pag. 25-38

(3) Dubey, Satya D.: A Generalization of a Simple Test Function for Guarantee Time Associated with the Exponential Failure Law. Skand. Aktuar. 1963. Häft 1-2. Pag. 1-24

tribución exponencial negativa. La hipótesis nula contrastada es $H_0: G=G_0$, respecto a las posibles alternativas: $H_1: G < G_0$ ó $H_1: G > G_0$, es decir, respecto de la hipótesis alternativa: $H_1: G \neq G_0$. Dubey obtiene la función de densidad de S en el supuesto de hipótesis nula, las funciones de potencia para $G < G_0$ y $G \neq G_0$ en general, así como los momentos de S, encontrando interesantes relaciones entre los momentos de orden r y de orden (r-1). De esta forma, se establece el contraste como a continuación expresamos: La función de contraste simple, al nivel de significación de α , siendo $H_0: G=G_0$ la hipótesis nula y $H_1: G \neq G_0$ la alternativa, y supuesto que el parámetro de escala θ es desconocido, es la siguiente:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < S < c \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo:

- 1/ $\phi(t)$ la función de contraste, que nos expresa la probabilidad de aceptación de la hipótesis alternativa H_1 .
- 2/ $S = \frac{t_a - G_0}{t_b - t_a}$ el estadístico ya analizado, que define el contraste, y
- 3/ c la constante positiva que satisface la relación $\int_c^{\infty} f(s) ds = \alpha$ siendo $f(s)$ la función de densidad de S en el supuesto de hipótesis nula H_0 .

Dubey analiza, así mismo, cómo la función de contraste $\phi(t)$ es una generalización de cuatro funciones de contraste, correspondientes a las distintas posibilidades de hipótesis alternativa. El trabajo se completa con el apéndice de dos tablas de valores críticos de c (cola superior en una, cola inferior en la otra) para distintos niveles de significación y distintos valores de n, a y b.

Sobre contrastes de la razón de verosimilitud referidos a esta distribución, son de destacar los trabajos de Paulson y el más reciente de Dubey (1). En éste último Dubey, para el contraste de la hipótesis nula $H: G \leq G_0$ respecto de la alternativa

(1) Dubey, Satya D.: A Generalization of the Likelihood-Ratio Test for Guarantee Time Associated with the Exponential Failure Law.
Skand. Aktuar. 1963. Haft 1-2. Pag. 25-40

$A: G \neq G_0$, supuesto que el parámetro de escala θ es desconocido, define, al nivel de significación α , la función de contraste de la razón de verosimilitud generalizada, basada en las observaciones muestrales ordenadas t_a, t_{a+1}, \dots, t_b ($1 \leq a < b \leq n$), como la función:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < W < c \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde:

1/ $\phi(t)$ es la función contraste, que expresa la probabilidad de aceptación de la hipótesis alternativa A.

$$2/ W = \frac{n(b-a)(t_a - G_0)}{\sum_{i=a+1}^{b-1} (t_i - t_a) + (n-b+1)(t_b - t_a)} \quad y$$

3/ c es la constante que satisface la relación $\int_c^\infty f(w)dw = \alpha$, siendo $f(w)$ la función de densidad del estadístico W en el supuesto de la hipótesis nula H .

El trabajo de Dubey incluye la determinación de $f(w)$, el cálculo de los momentos del estadístico W y de la función de potencia del contraste, así como la discusión de las posibles hipótesis alternativas, $G < G_0$ y $G > G_0$, como casos separados de análisis, para concluir con el establecimiento de un contraste de razón de verosimilitud para el parámetro de escala θ , contraste que define de la siguiente forma: Sea $H: \theta = \theta_0$ la hipótesis nula y $A: \theta \neq \theta_0$ su alternativa. Al nivel de significación α , se define la función de contraste:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } c_1 < \frac{2}{\theta_0} \sum_{i=a+1}^{b-1} (t_i - t_a) + (n-b+1)(t_b - t_a) = u < c_2 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El estadístico u tiene una distribución χ^2 con $2(b-a)$ grados de libertad. Dubey concluye su trabajo estableciendo el contraste simultáneo de los dos parámetros, G y θ , de la distribución exponencial negativa, y establece que dicho contraste depende del estadístico u anteriormente definido.

II.2.2.3.- DISTRIBUCION LOGARITMICO-NORMAL

La distribución logarítmico-normal o lognormal es una ley de probabilidad que se ha revelado como modelo útil en muy diferentes campos científicos, como el biológico (distribución del tamaño de un órgano), económico (distribución de los ingresos), sociológico (distribución de la edad en el primer matrimonio), etc. También encuentra aplicación como modelo de distribución de la cuantía de los daños ocasionados por un siniestro.

Definición de la distribución lognormal

Diremos que una variable aleatoria ξ sigue una distribución logarítmico-normal o lognormal si, tomando valores en el campo real positivo, su logaritmo neperiano sigue una distribución normal, $\log \xi: N(\mu; \sigma)$. Por tanto, si la variante η es $N(0,1)$, se verifica la siguiente relación:

$$\log \xi = \sigma\eta + \mu \quad \text{de donde} \quad \xi = e^{\mu + \sigma\eta}$$

Si por $G(x) = P(\eta \leq x)$ representamos la función de distribución de la variante $\eta: N(0,1)$, la función de distribución de ξ quedará definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\xi \leq x) = P(\log \xi \leq \log x) = P(\sigma\eta + \mu \leq \log x) = \\ &= P(\eta \leq \frac{\log x - \mu}{\sigma}) = G(\frac{\log x - \mu}{\sigma}) \end{aligned}$$

En consecuencia, la función de densidad de la variante ξ será:

$$f(x) = F'(x) = G'(\frac{\log x - \mu}{\sigma}) \frac{1}{\sigma x} = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\log x - \mu}{\sigma})^2}$$

que nos define entonces la distribución lognormal sin necesidad de hacer relación explícita a la distribución normal, con la que de manera natural se encuentra relacionada.

La distribución lognormal resulta ser una caso particular del sistema de curvas de Kapteyn. En efecto, tal sistema viene definido por la función de densidad:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\{G(t)-\mu\}^2}{2\sigma^2}} |G'(t)|$$

que, fijada $G(t)$, establece una familia de curvas dependiente de dos parámetros que son asimétricos. Este sistema de curvas presenta múltiples aplicaciones a los fenómenos biológicos, económicos, etc. Pues bien, la distribución logarítmico-normal resulta ser un caso particular de tal sistema sin más que hacer $G(t) = \log t$.

Génesis actuarial de la distribución lognormal

La distribución lognormal se genera en el mundo actuarial a través de la siguiente modelización: Supongamos que la cuantía del daño ξ ocasionado por un siniestro depende de n causas o impulsos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, que actúan en el orden que indican los subíndices. Representemos por x_s la cuantía del daño producido por las s primeras causas o impulsos. Establezcamos las hipótesis:

- a/ las variantes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son estocásticamente independientes.
- b/ El incremento del daño producido por el impulso ξ_{s+1} es proporcional a dicho impulso y al tamaño del siniestro. Es decir: $\Delta x_s = \xi_{s+1} x_s$

Entonces tendremos: $\xi_{s+1} = \frac{\Delta x_s}{x_s}$ que nos conduce a:

$$\xi = \sum_{s=0}^{n-1} \xi_{s+1} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Delta x_s}{x_s} \sim \int \frac{dx}{x} = \log x$$

Cuando n (número de causas o impulsos) crece, aplicando el teorema central del límite, la variante ξ tiende a distribuirse como una normal $N(\mu; \sigma)$. La variante x (cuantía del daño) se distribuye entonces según el modelo logarítmico-normal, con función de densidad:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{para } x > 0$$

Elementos de la distribución logarítmico-normal

Determinemos, en primer lugar, el momento de orden r con relación al origen de esta distribución:

$$\alpha_r = E(\xi^r) = \int_0^\infty x^r \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Haciendo el cambio de variable: $t = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$, nos resultará:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma t + \mu)r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{r\sigma t + \mu r} \frac{r^2 \sigma^2}{2} - \frac{r^2 \sigma^2}{2} e^{-t^2/2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{r\mu + \frac{r^2 \sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2(r\sigma - t)^2} dt = e^{r\mu + \frac{r^2 \sigma^2}{2}} \end{aligned}$$

Por tanto, el valor probable de la distribución será:

$$E(\xi) = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

y la varianza: $V(\xi) = e^{2\mu + \sigma^2(e^{\sigma^2} - 1)}$

Habida cuenta de que $V(\xi) = E(\xi)^2(e^{\sigma^2} - 1)$, resulta que $e^{\sigma^2} - 1$ es el cuadrado del coeficiente de variación.

Berliner (1) ha procedido al cálculo de la sémivarianza de esta distribución, obteniendo la siguiente expresión:

$$V_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma/2}^{\infty} (e^{2\sigma z + 2\mu} - 2e^{\sigma^2/2 + \sigma z + 2\mu} + e^{\sigma^2 + 2\mu}) e^{-z^2/2} dz$$

donde: $z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$. Expresando: $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du$,

se obtiene:

$$V_+ = E^2 \{e^{\sigma^2} (1 - \phi(-3\sigma/2)) - (1 - \phi(-\sigma/2)) - (\phi(\sigma/2) - \phi(-\sigma/2))\}$$

de donde resulta:

$$\frac{V_+}{V} = \frac{1}{e^{\sigma^2} - 1} \{e^{\sigma^2} (1 - \phi(-3\sigma/2)) - (1 - \phi(-\sigma/2)) - (\phi(\sigma/2) - \phi(-\sigma/2))\}$$

se verifica que: $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V_+/V = 1$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0} V_+/V = \frac{1}{2}$, de donde el cociente V_+/V es independiente de μ y suavemente creciente en función de σ , suavemente de manera especial para $\sigma \geq 1$.

La mediana de la distribución será el valor X_m de la variante que verifica:

$$F(X_m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{X_m} \frac{1}{x} e^{-(\ln x - \mu)^2 / 2\sigma^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln X_m} e^{-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2} dx = N(\ln X_m) = 1/2$$

siendo $N(x)$ la función de distribución de la distribución $N(\mu; \sigma)$. Habida cuenta de que en la distribución normal la mediana coincide con el valor probable μ , se verificará: $\ln x_m = \mu$, de donde la mediana resulta ser: $x_m = e^\mu$.

La moda x_M de la distribución será el valor de la variante que maximice la función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Derivando esta función resulta:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma x^2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \left(1 + \frac{\ln x - \mu}{\sigma^2}\right)$$

que se anula para $x = e^{\mu - \sigma^2}$. Así pues, la moda de la distribución será: $x_M = e^{\mu - \sigma^2}$.

Vélez Catalán (1), en un extenso trabajo efectuado sobre la distribución lognormal, presenta las medidas no centrales de ésta más importantes, tales como cuartiles, etc.

Propiedades de la distribución lognormal

- 1/ Si la variante ξ sigue la distribución lognormal con parámetros $LN(\mu, \sigma)$, es decir, $\log \xi$ es $N(\mu, \sigma)$, entonces la variante $1/\xi$ sigue también la misma distribución, pero con parámetros $LN(-\mu, \sigma)$, es decir, $\log 1/\xi$ es $N(-\mu, \sigma)$. En efecto, se verifi-

(1) Vélez Catalán, Antonio: Distribución de los stocks en almacén. Estadística Española nº23. Abril-Junio 1964. Pag.19-31

ca que $\log 1/\xi = -\log \xi$, luego si $\log \xi$ sigue la distribución normal, $\log 1/\xi$ es así mismo una variante normal, y siendo μ y σ^2 la media y la varianza de $\log \xi$, se verifica que $\log 1/\xi$ tendrá la misma varianza σ^2 , y por media $-\mu$.

- 2/ Si ξ_1 y ξ_2 son estocásticamente independientes entre sí y logarítmico-normales, con parámetros: $\xi_1: \text{LN}(\mu_1, \sigma_1)$; $\xi_2: \text{LN}(\mu_2, \sigma_2)$ entonces la variante producto $\xi_1 \cdot \xi_2$ es, así mismo, logarítmico-normal, con parámetros $\text{LN}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$. En efecto, se verifica que: $\log \xi_1 \cdot \xi_2 = \log \xi_1 + \log \xi_2$ y siendo $\log \xi_1: N(\mu_1, \sigma_1)$ y $\log \xi_2: N(\mu_2, \sigma_2)$ estocásticamente independientes entre sí, $\log \xi_1 \cdot \xi_2$ será normal con parámetros: $\log \xi_1 \cdot \xi_2: N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Esta propiedad nos permite aplicar el teorema central del límite a un producto infinito de variantes estocásticamente independientes entre si de la siguiente forma:

- 3/ Teorema central del límite: Sean las variantes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ estocásticamente independientes entre sí cuyos logaritmos naturales tienen por parámetros $(\mu_1, \sigma_1), (\mu_2, \sigma_2), \dots, (\mu_n, \sigma_n)$, respectivamente. Se demuestra, imponiendo ciertas limitaciones a las distribuciones de las variantes ξ_i , que la variante producto $\xi = \prod_{i=1}^n \xi_i$ converge a una distribución logarítmico-normal, con parámetros $\text{LN}(\sum_{i=1}^n \mu_i; \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2})$.

Ajuste gráfico de una distribución lognormal

Existe un conocido método de ajuste gráfico a una distribución normal, que se puede extender a una distribución logarítmico-normal y que tiene una gran importancia desde el punto de vista práctico. Tal método, para el caso de la distribución normal, consiste en lo siguiente: Sea $\phi(x)$ la función de distribución de una distribución $N(\mu, \sigma)$ y $\mu_{\phi(x)}$ la recta:

$$\mu_{\phi(x)} = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

que corresponde a los valores de una variante con distribución $N(0,1)$. Evidentemente, los valores de $\mu_{\phi(x)}$ y de $\phi(x)$ se corresponden de la siguiente forma:

$x = \mu$	$\mu_{\phi(x)} = 0$	$\phi(x) = 0,5$
$x = \mu + \sigma$	$\mu_{\phi(x)} = 1$	$\phi(x) = 0,84134$
$x = \mu + 2\sigma$	$\mu_{\phi(x)} = 2$	$\phi(x) = 0,97725$
.....

Las tablas de la distribución $N(0,1)$ nos permiten establecer pormenorizadamente esa correspondencia entre $\phi(x)$ y $\mu_{\phi}(x)$. A partir de ellas se puede definir una escala de coordenadas, llamada gaussiana con distancias al origen proporcionales a $\mu_{\phi}(x)$. De esta forma, se construye un papel funcional gausso-aritmético, en el que el eje de abscisas viene dado en la escala aritmética y el de ordenadas viene dado en escala gaussiana. Si, representados en dicho papel, los puntos de coordenadas $(x_i, \mu_{\phi}(x_i))$ están más o menos alineados, el ajuste a la distribución normal es aceptable. En el caso de una distribución normal, los puntos, como es evidente, están exactamente lineados. A la recta que representa a la función de distribución de la ley normal en papel gausso-aritmético se la denomina recta de Henry. Una vez ajustada la recta a la nube de puntos observados, la estimación empírica de los parámetros μ y σ es inmediata. Para estimar μ , basta considerar que $\mu_{\phi}(\mu) = 0$, es decir, que la recta tendrá por abscisa en el origen $(\mu, 0)$. Una vez estimado μ , se suele estimar σ teniendo en cuenta que $\mu_{\phi}(\mu + 2\sigma) = 2$.

Pues bien, si tenemos en cuenta que una variante ξ sigue una distribución logarítmico-normal si su logaritmo natural $\ln \xi$ es normal, $N(\mu, \sigma)$, la relación entre ambas funciones de distribución será:

$$F(x) = P(\xi \leq x) = P(\ln \xi \leq \ln x) = \phi(\ln x)$$

Por tanto, define la función lineal: $\mu_{\phi}(x) = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$

los valores de la variante ξ la satisfarán. Es decir, la variante ξ será lognormal si existen dos parámetros μ y σ , $-\infty < \mu < +\infty$, $0 < \sigma < \infty$, tales que se verifique:

$$\mu_{\phi}(x) = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$$

o, lo que es lo mismo, que los puntos $(\ln x_i, \mu_{\phi}(x_i))$ estén alineados. El criterio entonces es claro: Si los puntos de coordenadas $(\ln x_i, \mu_{\phi}(x_i))$ están más o menos alineados, el ajuste lognormal es aceptable. Para obviar el problema práctico que supondría el cálculo de $\ln x_i$, se trabaja con una escala logarítmica. De esta forma, se establecen las representaciones de los puntos observados $(x_i, \mu_{\phi}(x_i))$ sobre un papel funcional gausso-logarítmico, que tiene el eje de abscisas expresado en escala logarítmica y el

eje de ordenadas en escala gaussiana. A la recta representativa de la función de distribución de la ley lognormal en papel gaussio-logarítmico también se la denomina recta de Henry. La estimación de los parámetros μ y σ se efectúa de una manera inmediata: De $F(x_1) = \Phi(\ln x_1) = 0,5$, $F(x_2) = \Phi(\ln x_2) = 0,97725$ se obtienen inmediatamente los valores de x_1 y x_2 . Habida cuenta que: $\ln x_1 = \mu$; $\ln x_2 = \mu + 2\sigma$, resulta:

$$\mu = \ln x_1$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln x_2 / x_1 = \frac{1}{2} (\ln x_2 - \ln x_1)$$

Trabajos sobre la distribución lognormal

Un trabajo muy completo sobre la distribución que analizamos es la obra de Aitchison y Brown (1). Desde el punto de vista actuarial, resulta de especial interés el trabajo de Bancket, titulado "The Lognormal Model for the Distribution of One Claim" (2). En él, Bancket hace una aplicación extensa de la distribución lognormal a los seguros de Accidentes, de Responsabilidad Civil del automóvil, de pérdida de beneficios debidos al fuego y de incendios. El autor ha encontrado buenos ajustes en todos estos casos, especialmente para valores grandes de las variables. Otro trabajo de interés desde el punto de vista económico es el de Vélez Catalán, ya reseñado, relativo al cálculo del inmovilizado medio óptimo de un almacén en comparación con el inmovilizado medio real, a efectos de analizar la política de reaprovisionamiento en el almacén. El modelo probabilístico básico resulta ser una distribución lognormal.

Un autor que ha tratado con profundidad los problemas de divisibilidad infinita de distintas distribuciones, y entre ellas,

(1) Aitchison, J.-Brown, J.A.C.: The Lognormal Distribucion. Cambridge University Press, 1957.

(2) Bancket, L.B.: The Lognormal Model for the Distribution of One Claim. The Astin Bulletin. Vol. II, Part. 1. Enero 1962.

la logarítmico-normal ha sido Thorin (1). A efectos de probar la divisibilidad infinita de la distribución lognormal, Thorin introdujo las convoluciones gamma generalizadas (GGC), y desarrolló su teoría en una serie de trabajos. La distribución lognormal resulta ser así una convolución gamma generalizada y, en cuanto tal, infinitamente divisible. El propio Thorin, en unión con Wikstad (2) ha analizado recientemente la probabilidad de ruina en el supuesto de que la distribución de la cuantía de un siniestro se comporte como el modelo logarítmico-normal. En este sentido, demuestran que la función de distribución de la distribución lognormal, $F(y)$, puede ser expresada en la forma:

$$F(y) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-xy}) dV(x)$$

donde V es una función absolutamente continua que, sin ser una función de distribución, conserva algunas útiles propiedades de tales tipos de funciones. En el mismo trabajo, dan una aproximación a la función de distribución lognormal $F(y)$ a través de la función $F_a(y)$, definida como una combinación lineal de un escaso número de distribuciones exponenciales (cuatro o cinco en concreto), de la siguiente forma:

$$F_a(y) = 1 - \sum_{v=1}^m a_v e^{-\alpha_v y} \quad \text{con } 0 < \alpha_j < \alpha_k \text{ para } j < k$$

$$\sum_{v=1}^m a_v = 1$$

$$m = 4 \text{ ó } 5$$

Tres tablas con cálculos de los valores numéricos de las probabilidades de ruina, una primera con $F(y)$ (lognormal) y otras dos con la aproximación $F_a(y)$ para $m = 4$ y $m = 5$, respectivamente, así como la función de distribución del periodo inter-siniestros (Interclaim time), $k(t) = 1 - e^{-t}$; para todas ellas, completan el análisis de Thorin y Wikstad sobre probabilidades de ruina con la distribución lognormal.

(1) Thorin, Olof: On the Infinite Divisibility of the Lognormal Distribution. Scandinavian Actuarial Journal. 1977. Pag. 121-148

(2) Thorin, Olof-Wikstad, Nils: Calculation of Ruin Probabilities When the Claim Distribution is Lognormal. The Astin Bulletin. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero 1977. Pag. 231-246

II.2.2.4.- DISTRIBUCION DE PARETO

Introducción económica al modelo

Parece obligado iniciar el análisis del modelo de Pareto según las coordenadas en que éste lo definió, es decir, como distribución de la renta personal en una colectividad, si bien el modelo ha rebasado con mucho ese ámbito, con ser importante, para pasar a situarse como elemento fundamental de múltiples análisis de fenómenos, entre los que, a nuestros efectos, destacan los actuariales como modelo de la distribución de cuantía de siniestros; con aplicaciones fundamentales al reaseguro de exceso de pérdidas, etc. Empecemos, por tanto, por la definición económica del modelo, a través de la adecuada exposición de Oskar Lange (1) sobre el mismo: "Desde 1897, el economista italiano Vilfredo Pareto... encontró cierta regularidad en la distribución de los ingresos en los países capitalistas y también en países en condiciones feudales y protocapitalistas. Con base en estadísticas de varios países, Pareto elaboró distribuciones acumulativas de frecuencias que indicaban que muchas personas tenían ingresos no inferiores a ciertas sumas indicadas en la serie. Luego trazó los diagramas de esas distribuciones de frecuencias, marcando sobre el eje de abscisas los ingresos x , y sobre el de ordenadas el número de personas con ingresos de x o mayores de x . Pareto encontró que, en la mayoría de los casos que investigó, las curvas que ilustraban este tipo de distribución de ingreso eran de forma similar entre sí; esto es, eran hipérbolas cuya ecuación es de la forma:

$$y = \frac{A}{(x-a)^\alpha}$$

donde a es el ingreso más bajo al cual comienza la curva y A y α son ciertos parámetros positivos. A la curva correspondiente se la denomina curva de Pareto. De la ecuación de la misma se obtie-

(1) Lange, Oskar. Introducción a la Econometría. Fondo de Cultura Económica. México, 1964. Pag. 147-163

ne que cuando $x \rightarrow a$, entonces $y \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow \infty$, entonces $y \rightarrow 0$; en otras palabras, la curva de Pareto tiene dos asíntotas, $x = a$ e $y = 0$. Si trasladamos el eje de ordenadas al punto correspondiente al ingreso más bajo que consideremos, entonces $a = 0$, y la ecuación de la curva de Pareto es de la forma: $y = A x^{-\alpha}$. Usualmente tomamos esta forma simplificada de la curva de Pareto en la práctica, ya que por lo general hay falta de información con respecto al número de personas de ingreso bajo. Los datos de ingresos en los países capitalistas se obtienen principalmente de las estadísticas de impuestos y las personas de bajo ingreso no pagan impuestos sobre la renta. Pero, si tuviéramos información de las personas con ingresos bajos, entonces la curva se flexionaría en cierto punto y cortaría a la recta $x = a$. La fórmula de Pareto no es aplicable a los ingresos bajos".

Así pues, si la variante ξ expresa los niveles de ingreso personal en una colectividad, la función $y = A x^{-\alpha}$ medirá la probabilidad de que un individuo disfrute de una renta igual o superior a x , con lo que la función de distribución de ξ , en el modelo de Pareto, será: $F(x) = 1 - A x^{-\alpha}$.

La forma de la función de ingresos $y = A x^{-\alpha}$ permite interpretaciones económicas y sociológicas del máximo interés. En efecto, tomando logaritmos en la misma resulta: $\log y = A - \alpha \log x$, diferenciando:

$$\frac{dy}{y} = -\alpha \frac{dx}{x}$$

que nos indica que el decrecimiento relativo del número de personas es proporcional al incremento relativo del ingreso. Por otra parte, si tomamos variaciones iguales en el ingreso, las variaciones relativas del mismo serán tanto más pequeñas cuanto mayor sea el nivel absoluto de ingresos. De aquí puede deducirse la ley de Pareto, que en palabras de Pena Traperó (1), puede formularse en los siguientes términos: "El decrecimiento relativo del número de personas a medida que el ingreso aumenta es cada vez

(1) Pena Pareto, Jesús Bernardo: Modelo Econométrico para el estudio de la distribución personal de la renta en España. Estadística Española nº27. Abril-Junio 1965
Pag. 38-49

más pequeño, y la disminución del mismo es proporcional al nivel absoluto de los ingresos". Esta ley viene a significar que, a medida que aumenta el nivel de ingresos, es relativamente más fácil pasar a un nivel superior. O, como dice Lange, "si imaginamos los varios niveles de ingresos como si estuvieran separados por "tamices" deteniendo un avance mayor, entonces, mientras más alto sea el ingreso, estos "tamices" eliminan menos personas y el porcentaje de personas "tamizadas" disminuye en proporción al tamaño de los ingresos". Este mismo comportamiento se observa en numerosos fenómenos en los que juega un papel dominante la habilidad humana. Así, los progresos en los estudios, o en los oficios y artes, son tanto mayores cuanto más elevado sea el nivel alcanzado. De esta forma, la distribución de la habilidad humana seguiría la ley de Pareto, de donde se infiere una justificación de la equidad de la distribución de los ingresos. Sobre el tema de la equidad y justicia en la distribución de los ingresos volveremos posteriormente al tratar del parámetro α .

Si en la distribución de ingresos se fija un valor de ingreso mínimo, x_0 , se define una distribución truncada, en la que la variante tiene por dominio x_0, ∞ , y en la que, dada la función de distribución de Pareto: $F(x) = 1 - Ax^{-\alpha}$, se verificará: $F(x_0) = 0$, y, en consecuencia, $A = x_0^\alpha$, con lo que la función de distribución pasará a ser:

$$F(x) = 1 - (x_0/x)^\alpha \quad \text{para } x \geq x_0$$

siendo entonces la función de densidad:

$$f(x) = \alpha x_0^\alpha x^{-\alpha-1} \quad \text{para } x \geq x_0$$

El valor probable de la distribución, que nos será útil en las consideraciones que posteriormente estableceremos, será entonces:

$$E(\xi) = \alpha x_0 / (\alpha - 1) \quad \text{siendo } \alpha > 1.$$

Analicemos los valores y significado del parámetro α . Como vimos anteriormente, se verificaba: $dy/y = -\alpha dx/x$, de donde $\alpha = -d \log y / d \log x$, es decir, α es la elasticidad de la función de distribución de ingresos, y ello permite que se obtengan de sus valores interesantes conclusiones de tipo económico y social. En efecto, Pareto, al analizar los datos relativos a los

ingresos de diversos países en diferentes periodos, encontró que la magnitud del parámetro α variaba entre 1,2 y 1,9, adoptándose un valor medio de 1,5. Pues bien, como resalta Lange, "Harold Davis consideró que, cuando el coeficiente α ... tiene un valor próximo a 1,5, hay un estado de equilibrio social en la sociedad dada. Si el valor del coeficiente es menor que 1,5, la sociedad está amenazada por el fascismo.. Por otra parte, una desviación del coeficiente α muy por encima de 1,5, conduce a la revolución social. La sociedad, en opinión de Davis, está algo acostumbrada a la distribución del ingreso según una curva de la fórmula $y = Ax^{-\alpha}$, donde $\alpha = 1,5$. Sin embargo, si las desigualdades en la distribución del ingreso se incrementan ($\alpha > 1,5$), el pueblo comienza a sublevarse y a promover la revolución. Por otra parte, cuando la distribución del ingreso se vuelve más equitativa ($\alpha < 1,5$), las clases altas luchan, por su propio interés, por afianzar su dominio y esto conduce al fascismo o a alguna otra fuerza antidemocrática de gobierno de las clases poseedoras". Y es que como indica el propio Lange, "el valor del parámetro α puede considerarse como una medida de la desigualdad de la distribución de los ingresos. Mientras mayor sea el valor del parámetro α , más cóncava es la hipérbola y mayor la diferencia entre cada dos valores de ingresos de las varias clases de la población". Este significado del valor del parámetro α lo expresa con acierto Pena Trappero de la siguiente forma: "Cada variación del nivel de ingresos equivale a un proceso de filtrado. α mide la capacidad del filtro. Cuanto mayor sea α mayor será la cantidad de personas retenidas por el filtro y, por tanto, en los primeros niveles de ingresos irán quedando retenidos mayores porcentajes de personas que si α fuera pequeño. De aquí se puede deducir que la distribución de la renta es tanto más justa cuanto más pequeño sea el valor de α , pues ello permite alcanzar niveles elevados de ingresos a mayor porcentaje de personas". Sin embargo, no todos los autores están de acuerdo en esta interpretación del parámetro α . Alcaide (1), por ejemplo, razona en los siguientes términos:

(1) Alcaide Inchausti, Angel: Distribuciones probabilísticas de la renta personal. Estadística Española. nº19. Abril-Junio 1963. Pag. 5-11

"Dado el valor probable de la distribución de Pareto, $E(\xi)$, y representando por M a la renta media de toda la población de rentistas, debe verificarse que: $E(\xi) = \alpha x_0 / (\alpha - 1) = M$, de donde $\alpha = M / (M - x_0)$, lo que equivale a decir que al aumentar la discrepancia $M - x_0$ entre la renta media M y la renta mínima x_0 , α debe disminuir y recíprocamente. Por tanto, puede concluirse diciendo que el parámetro α de Pareto es un número superior a la unidad que corresponde a una distribución tanto más justa de la renta cuanto más se aleje del valor uno". Como señala Pena Traperó, "la contradicción entre ambas interpretaciones del parámetro α radica en el distinto concepto de "distribución justa", que evidentemente es un juicio de valor. En un caso, se considera óptima aquella distribución en que todos los perceptores de renta tendrían la misma, en el segundo caso se considera óptima aquella distribución que permite alcanzar niveles elevados de rentas a porcentajes elevados de población".

Un último punto sobre la interpretación, o mejor, génesis económica del modelo de Pareto queremos analizar brevemente, dada la importancia que al mismo dedicó su autor, a través de determinados estudios. Nos referimos al carácter universal o no de la ley de distribución de renta formulada por Pareto. Esta autor estaba convencido de que su ley tenía, efectivamente, un carácter universal, es decir, era válida para todo tiempo y toda sociedad. Como dice Lange, "de la regularidad que estableció empíricamente, Pareto trató de derivar una ley sociológica general que consideró como la ley natural que tendría validez en todo tiempo y en toda sociedad. Aparecería de esta ley que todas las reformas sociales tendentes a eliminar la desigualdad en la distribución del ingreso racional estarían destinadas al fracaso de antemano, ya que la ley de la naturaleza sobre la distribución del ingreso actuaría en cualesquiera condiciones y dicha distribución del ingreso tomaría siempre la forma indicada por la fórmula que él estableció. Pareto expresó esto en las siguientes palabras: "En vista de la tendencia de la distribución del ingreso entre la población, que adquiere una forma definida, todos los cambios en una parte de la curva afectarán las demás partes de la misma; al final la sociedad vuelve a su forma normal, precisamente en la misma

forma en que la solución de una determinada sal siempre da cristales similares". Para apoyar su teoría de que su ley relativa a la distribución de los ingresos es una ley general de la naturaleza, Pareto se refirió al hecho de que había hecho sus observaciones con base en estadísticas de diferentes países para diferentes periodos; por ejemplo, entre otros, había estudiado la situación desde este punto de vista en Gran Bretaña, Prusia y Sajonia en el siglo XIX; en Florencia durante el Renacimiento; en el Balse medieval; en el Augsburgo de los siglos XV y XVI; en Perú a finales del siglo XVIII, etc, y siempre había obtenido los mismos resultados. Los sistemas sociales cambiaron, pero la ley de la distribución del ingreso - afirmaba Pareto - seguía en vigor... La cuestión es, si en verdad, la regularidad descubierta por Pareto es una ley general, válida en todos los sistemas sociales y en todas las condiciones históricas. ¿Cómo está, por ejemplo, distribuido el ingreso en la Polonia popular y en otros países socialistas?". Porque, en la interpretación de Lange, "tenemos la distribución de Pareto en aquellos casos en que los ingresos provienen de la propiedad capitalista o feudal. Esto es comprensible, puesto que, sin duda, cuanto mayor sea el ingreso de la propiedad, tanto más fácil será incrementar ese ingreso... Todo indica que la distribución de la propiedad de la tierra y de otros bienes de producción fue el factor que determinó la distribución de ingresos en los países con sistemas feudales o capitalistas y les dió la forma correspondiente a la ley de Pareto". Ahora bien, ¿qué ocurre, por ejemplo, con los países de planificación central del Este europeo?. Lange procede a ajustar la curva de Pareto a la distribución de ingresos de los trabajadores y empleados de Polonia según sus percepciones en el mes de septiembre de 1955, a partir de la muestra elaborada por el Consejo Central de Sindicatos de Polonia, obteniendo el modelo:

$$y = 175 \cdot 10^6 x^{-2,27}$$

que, aparte de dar un valor absolutamente atípico al parámetro α , $\alpha = 2,27$, para los valores en que el modelo se ajusta adecuadamente, resulta ser un modelo absolutamente inadecuado para la realidad social del país analizado, obteniéndose por contra un buen ajuste a la distribución logarítmico-normal. Analizada la distribución de salarios en Polonia para el periodo 1956-1959, se obtien, así mismo, un buen ajuste a la distribución

logarítmico-normal. Pena Trapero, en el trabajo reiteradamente mencionado en este estudio, ha procedido de manera similar a un ajuste de la distribución de Pareto a la realidad española, en base a los resultados de la Encuesta de Presupuestos Familiares que realizó el Instituto Nacional de Estadística a lo largo del año 1964. El resultado obtenido ha sido el modelo $y = 7.341 x^{-1,4}$ en el que el parámetro α , $\alpha = 1,43$, adopta un valor "normal", según el análisis de Pareto. Sin embargo, establecido el contraste de bondad del ajuste, al nivel de significación del 5%, tal ajuste a la curva de Pareto debe ser rechazado, pues el valor de la χ^2 con 12 grados de libertad, al 5%, es de 21,03, mientras que el valor de índice de las desviaciones es de 79,08. Así pues, la ley de Pareto no se ajusta a la realidad de la distribución de los ingresos personales en España, al menos para el año 1964. Tampoco es aceptable a partir de la información de la misma muestra, un ajuste a la distribución normal, si bien en este caso las desviaciones son menores que en el caso de la distribución de Pareto, concretamente el índice vale 52,1. Sin embargo, establecido un ajuste a la distribución logarítmico-normal, se obtiene un índice de desviaciones de 8,13, que permite aceptar el ajuste. Así pues la distribución personal de los ingresos en España sigue una ley logarítmico-normal con parámetros $\mu = 3,7$ y $\sigma = 0,39$, es decir, con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{0,39x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - 3,7)^2}{2 \cdot 0,39^2}}$$

Con independencia de que la información utilizada es, sin duda, insuficiente para afirmar que el modelo correcto para la distribución de ingresos en España sea el anteriormente formulado (lognormal), lo mismo que en el caso Polaco a través de los análisis (sin duda antiguos) de Lange, lo que parece indiscutible es que la ley de Pareto no tiene carácter universal, en sentido espacial y temporal, como ley de la distribución de los ingresos personales en cualquier colectividad económica. Es, eso sí, un modelo fundamental en estos análisis, pero no el único. Como no será el único modelo utilizado en la definición de la ley de probabilidad de la cuantía de un siniestro, aunque sí será uno de los más importantes. Una vez establecida esta introducción económica al modelo de Pareto, que juzgamos importante por las resonancias y relaciones que tiene con el fenómeno actuarial, pasamos a describir sus características fundamentales.

Elementos fundamentales de la distribución de Pareto

La distribución de Pareto, definida como distribución truncada, es decir, con un valor mínimo de la variante $x_0 > 0$, que puede tener el significado de mínimo ingreso o, en términos actuariales, de siniestro de cuantía mínima, se establece de la siguiente forma: La variante ξ sigue una ley de Pareto si verifica:

$$S(x) = P(\xi > x) = \begin{cases} \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha & \text{para } x > x_0, \text{ siendo } x_0 > 0, \alpha > 0 \\ 0 & \text{para } x \leq x_0 \end{cases}$$

Al parámetro α , que define la distribución una vez establecido el valor de x_0 , se le suele denominar "índice de igualdad", por las consideraciones económicas del mismo que anteriormente se establecieron.

Así pues, la función de distribución de la distribución de Pareto será:

$$F(x) = P(\xi \leq x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha \quad \text{para } x \geq x_0$$

Se trata, obviamente, de una auténtica función de distribución, por cuanto es monótona creciente y verifica: $F(+\infty) = 1$; $F(-\infty) = F(x_0) = 0$.

La función de densidad será entonces:

$$f(x) = F'(x) = -\alpha \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha-1} \left(-\frac{x_0}{x^2}\right) = \alpha x_0^\alpha x^{-\alpha-1} \quad \text{para } x \geq x_0$$

La esperanza matemática de esta distribución será:

$$E(\xi) = \int_{x_0}^{\infty} x \alpha x_0^\alpha x^{-\alpha-1} dx = \alpha x_0^\alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)_{x_0}^t = \left(\frac{\alpha x_0}{\alpha-1} \right)$$

si y sólo si $\alpha > 1$, pues para $\alpha \leq 1$ la integral impropia no es convergente y, en cuanto tal, no existe el momento.

El momento de segundo orden con relación al origen será:

$$E(\xi^2) = \int_{x_0}^{\infty} x^2 \alpha x_0^\alpha x^{-\alpha-1} dx = \alpha x_0^\alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right)_{x_0}^t = \left(\frac{\alpha x_0^2}{\alpha-2} \right)$$

si y sólo si $\alpha > 2$, pues para $\alpha \leq 2$, la integral impropia es divergente y, en cuanto tal, no existe el momento. Supuesto que $\alpha > 2$, la varianza de la distribución será:

$$V(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \frac{\alpha x_0^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2 x_0^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$

Berliner, en su reiteradamente mencionado trabajo, ha procedido al cálculo de la semivarianza de la distribución de Pareto (pag. 50-51), obteniendo la expresión:

$$V_+ = \frac{2x_0^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^{\alpha-2},$$

obteniéndose en consecuencia: $\frac{V_+}{V} = 2 \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{1-\alpha}$

Se verifica que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} \frac{V_+}{V} = 1 ; \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{V_+}{V} = \frac{2}{e}$$

lo que indica que V_+/V es independiente de x_0 y suavemente decreciente en función de α .

La mediana de la distribución será el valor de la variante M , que verifique: $F(M) = P(\xi \leq M) = 1/2$, es decir: $1 - x_0^\alpha / M^\alpha = 1/2$, de donde: $M^\alpha = 2x_0^\alpha$ y, en consecuencia, la mediana será:

$$M = 2^{1/\alpha} x_0$$

Ajuste gráfico a una distribución de Pareto

Resulta fácil, y por supuesto práctico, establecer un ajuste gráfico o empírico a una distribución de Pareto, a la vista de la simplicidad de su función de distribución. En efecto, esta es, como sabemos: $F(x) = 1 - (x_0/x)^\alpha$. Tomando logaritmos, resulta: $\log \{1-F(x)\} = \alpha \{\log x_0 - \log x\} = \alpha \log x_0 - \alpha \log x$, que es la ecuación de una recta con ordenada en el origen $\alpha \log x_0$ y pendiente angular negativa $-\alpha$. Por tanto, dada una muestra $\{x_i\}$, si se representan en un gráfico los puntos de coordenadas $\{\log x_i, \log (1-F(x_i))\}$, tales puntos deben de estar más o menos alineados cuando la distribución sea próxima a una distribución de Pareto. Para evitar los cálculos se representan los puntos $\{x_i, 1-F(x_i)\}$ en un papel con doble escala logarítmica. Si el modelo resultante es lineal, se acepta la validez del ajuste a una distribución de Pareto. Para estimar entonces los valores de

los parámetros x_0 y α en dicho modelo, basta con tomar dos puntos de la recta ajustada. Es útil, a estos efectos, tomar el valor x_1 de la variable x que corresponde a $F(x) = 0$, $F(x_1) = 0$, y el valor x_2 que corresponde a $F(x) = 0,9$, $F(x_2) = 0,9$. El primero coincide con x_0 y el segundo, que es el cuartil de orden 0,90, es igual a $10^{1/9\alpha} x_0$, $x_2 = 10^{1/9\alpha} x_0$, de donde, tomando logaritmos decimales en esta última expresión, los parámetros resultan ser:

$$x_0 = x_1$$

$$\alpha = 1/\log_{10}(x_2/x_1) = 1/(\log_{10} x_2 - \log_{10} x_1)$$

Estimación de parámetros en la distribución de Pareto

Vamos a obtener estimadores del parámetro α en una distribución de Pareto según las condiciones técnicas del método de los momentos de Pearson y del método de la máxima verosimilitud.

a/ Método de los momentos

Dicho método, como es sabido, se basa en el llamado principio de analogía y consiste en igualar momentos de la distribución de probabilidad de la población con momentos muestrales. En nuestro caso, tendremos:

$$E(\xi) = \frac{\alpha}{\alpha-1} x_0 = \bar{x} \quad \text{de donde } \alpha^* = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - x_0}$$

b/ Método de la máxima verosimilitud

Dada una muestra aleatoria simple X de tamaño n procedente de una población de Pareto, la función de verosimilitud muestral será:

$$L(X, \alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha x_0^\alpha x_i^{-\alpha-1} = \alpha^n x_0^{n\alpha} \prod_{i=1}^n x_i^{-\alpha-1}$$

La segunda función de verosimilitud será:

$$l(X, \alpha) = \ln L = n \ln \alpha + n \ln x_0 - (\alpha+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

Su derivada será:

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln x_0 - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

de donde el estimador por máxima verosimilitud del parámetro α será:

$$\alpha^* = \frac{n}{-n \ln x_0 + \sum_{i=1}^n \ln x_i} = \frac{1}{-\ln x_0 + K}$$

siendo $K = \sum \ln x_i / n$ la media aritmética de los logaritmos neperianos de los elementos muestrales (que han de ser todos positivos en una población de Pareto).

La segunda derivada de la segunda función de verosimilitud es:

$$\frac{d^2 l}{d\alpha^2} = - \frac{n}{\alpha^2} < 0$$

lo que confirma que α^* es, efectivamente, el valor de α que maximiza l y, en consecuencia, la función de verosimilitud L . Se trata, efectivamente, de un estimador pro máxima verosimilitud de α .

El tema de la estimación de parámetros en una distribución de Pareto ha merecido la atención de diversos autores en la literatura científica. En concreto, podemos destacar los trabajos de Molik (1) y (2), autor que ha dedicado gran atención a la distribución de Pareto, como tendremos ocasión de apreciar. En el primero de ellos, procede a la estimación clásica del parámetro "índice" α por máxima verosimilitud, obteniendo la estimación bayeriana de dicho parámetro en el segundo de los trabajos reseñados. Así mismo, en su trabajo "Exact Moments of Order Statistic from the Pareto Distribution", que posteriormente se comentará, Molik procede a la estimación de parámetros en una distribución de Pareto, por medio de muestras ordenadas.

Otro trabajo de interés sobre el tema que analizamos es el de Lwin (3). En él, su autor presenta la estimación de la proba-

(1) Molik, Henrick John: Estimation of the Parameters of the Pareto Distribution. *Metrika* nº16. 1970. Pag. 126-132

(2) Molik, Henrick John: Bayesian Estimation of the Paretian Index. *Skand. Aktuar.* 1970. nº1-2. Pag. 6-9

(3) Lwin, Thaung: Estimation of the Tail of the Paretian Law. *Skand. Aktuar.* 1972. nº2. Pag. 170-178

bilidad de la cola de una distribución de Pareto, mediante el uso de las técnicas de estimación eficiente y bayesiana. En concreto, siendo la función de densidad de la distribución de Pareto expresada de la siguiente forma: $f(y/v, a) = va^v y^{-v-1}$ con $a > 0, v > 0, y \geq a$, estima la función: $P(t^*/v, a) = P(X > t^*/v, a) = a^v t^{*-v}$, donde t^* ($a < t^* < \infty$) es una constante conocida, por medio de: (a) el método de estimación insesgada de mínima varianza (MVU); (b) el método bayesiana, según la técnica desarrollada en el trabajo (2) de Molik, anteriormente reseñado. Como dice Lwin, "la estimación de las probabilidades de colas tiene una gran importancia en la teoría de la fiabilidad y en la teoría de las distribuciones de la cuantía de siniestros dentro de la matemática actuarial, y se puede presumir que será de no menor importancia en los estudios económicos referidos a la proporción de población con alto nivel de renta, etc. Las técnicas aportadas en el trabajo son generales y pueden ser usadas para estimar no sólo la probabilidad de la cola superior de una distribución, sino también la probabilidad correspondiente a cualquiera otra región de la variable aleatoria con una conocida distribución de probabilidad".

Convolución de una distribución de Pareto

El análisis de las convoluciones es trascendental en el establecimiento de la distribución del daño total, como tendremos ocasión de ver al analizar esta distribución. Si, como resulta frecuente, la ley de Pareto modeliza la cuantía de los siniestros, el análisis de su convolución, una vez admitida la independencia estocástica de las sucesivas variantes sumandos, es de la mayor importancia. En este análisis destaca de una manera fundamental el importante trabajo de Hagstroem, titulado "Remarks on Pareto Distributions" (1). En él, Hagstroem plantea el problema en los siguientes términos: Se pretende estimar la probabilidad de que se produzca una indemnización superior a x cuando se han producido n siniestros. Definida la independencia total como

(1) Hagstroem, K.G.: Remarks on Pareto Distributions. Skand. Akatuar. 1960

suma de n variantes, y supuesto que están igualmente distribuidas, se establece la hipótesis de que son estocásticamente independientes. Si expresamos por $S(x)$ la probabilidad de que X adopte un valor mayor que x , y por $S_n(x)$ la convolución de orden n , se verifica (supuesto que $x_0 = 1$):

$$S_n(x) = S(x-n+1) - \int_1^{x-n+1} S_{n-1}(x-u) dS(u), \text{ siendo } n \geq 1 \text{ y } S_0(x) = 1.$$

como indica Hagstroem, "el método de formar la función característica es extremadamente difícil para el caso de las distribuciones de Pareto. De hecho, la fórmula:

$$\int_1^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x} = \int_t^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_t^{\infty} \frac{\sen x}{x} dx$$

muestra que la función característica de una distribución de Pareto contendrá integrales de senos y cosenos, funciones éstas difíciles de manejar. Resulta quizá más sencillo analizar las convoluciones directamente. Ello precisa de prolijos cálculos algebraicos, que se pueden obviar mediante el uso de ordenadores". Procediendo de esta forma, se tendrá que la transformación de la fórmula general

$$S_n(x) = \frac{1}{(x-n+1)^k} + k \int_1^{x-n+1} S_{n-1}(x-u) \frac{du}{u^{k+1}}$$

dará:

$$S_n(x) = \frac{1}{(x-n+1)^k} + \frac{k(n-1)}{x^{2k}} \int_{(n-1)/x}^{1-(1/x)} \frac{dv}{v^k(1-v)^{k+1}} (1+R(x,v))$$

y es fácil ver que el cálculo para todos los valores de k dependerá de las siguientes dos integrales:

$$J_{q,r}(\theta, \theta') = \int_{\theta'}^{1-\theta} \frac{dv}{(1-v)^q v^r}; \quad L_{q,r}(\theta, \theta') = \int_{\theta'}^{1-\theta} \frac{\log \frac{1}{v} dv}{(1-v)^q v^r}$$

Es evidente que el cálculo de la convolución $S_n(x)$ pasa por el cálculo de la integral $J_{k+1,k}(1/x, (n-1)/x)$. Operando, resulta la siguiente expresión de la convolución buscada:

$$S_n(x) = \frac{1}{(x-n+1)^k} + \frac{k(n-1)}{x^{2k}} \cdot \frac{x^k - \left(\frac{x}{x-n+1}\right)^k}{k} = \frac{n}{x^k} + \dots$$

Para los primeros valores de n , se tendrá:

$$S(x) = S_1(x) = 1/x.$$

$$S_2(x) = \frac{2}{x} + \frac{2 \log(x-1)}{x^2}$$

$$S_3(x) = \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} \frac{x-2}{x-1} \log(x-2) + \frac{4}{x^3} \log(x-1) \log(x-2) +$$

$$+ \frac{2}{x^3} \{(\log(x-1))^2 - (\log 2)^2 - \frac{4}{x^3} \{L_{1,0}(\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x-1}) + L_{1,0}(\frac{1}{x-1}, \frac{1}{2})\}\} \text{etc.}$$

En definitiva, se tiene:

$$S_n(x) = \frac{n}{x^k} (1+R) \quad \text{con } R = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

por lo que se puede tomar como primera aproximación a la convolución n -ésima $S_n(x)$ a n/x^k ,

$$S_n(x) \sim \frac{n}{x^k}$$

También ha analizado Hagstroem a la distribución de Pareto en su artículo "Moyennes et Stochastique", cuya reseña incluimos en la bibliografía general, en el que introduce, entre otros análisis, nuevas interpretaciones sobre las convoluciones de la ley de Pareto.

Caracterización de la distribución de Pareto

El tema de la caracterización de distribuciones ha ocupado la atención de múltiples autores y, en consecuencia, ha conocido mucha tinta sobre el mismo en las revistas especializadas. La distribución de Pareto no podía ser una excepción en este contexto, bien al contrario, ha sido una de las favoritas, dada su importancia en los distintos ámbitos científicos y, de manera muy especial, en el ámbito actuarial. Como no podía ser menos, Malik es uno de los que han abierto fuego en este tema. En efecto, Malik (1), en uno de sus importantes trabajos sobre la distribución de Pareto, ha establecido un teorema de caracterización de dicha

(1) Malik, Henrick John: A Characterisation of the Pareto Distribution. Skand Aktuar. 1970. n°3-4. Pag. 115-117

distribución, a través de las propiedades de los estadísticos ordenados de una muestra aleatoria de tamaño n . Dicho teorema lo formula Molik en los siguientes términos: "Sea F la función de distribución absolutamente continua de una variable aleatoria X , con $F(x) = 0$ si $x < \xi$, $\xi > 0$, y con función de densidad $f(x)$. Sean $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ los elementos ordenados de una muestra aleatoria de tamaño n , correspondiente a dicha distribución. Entonces la condición necesaria y suficiente para que los estadísticos $Z = x_{m+1}/x_m$ para un valor fijo de m , $1 \leq m \leq n-1$, sean independientes es que la variable aleatoria X tenga una distribución de Pareto", es decir, tenga por función de densidad $f(x) = k\xi^k x^{-k-1}$ con $x \geq \xi$, $x > 0$, $\xi > 0$, y, por tanto, siendo $F(x) = 1 - \xi^k x^{-k}$ para algún $k > 0$. Como vemos dicho teorema caracteriza completamente (condición necesaria y suficiente) a la distribución de Pareto.

Samanta (1) ha generalizado el teorema de Molik a través de los siguientes lemas de caracterización de la distribución de Pareto:

"Teorema 3: Sea $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ los elementos ordenados de una muestra aleatoria de tamaño $N(N \geq 2)$ procedente de una población con función de distribución $H(y)$, donde H se supone continua por la derecha y $H(y) = 0$ si $y \leq \xi$, $\xi > 0$. El vector de variables aleatorias $(y_2/y_1, y_3/y_1, \dots, y_N/y_1)$ e y_1 son independientes si y sólo si $H(y) = 1 - \xi^a y^{-a}$ para algún $a > 0$.

Teorema 4: Con las mismas notaciones del teorema 3, las variables aleatorias y_{j+1}/y_j ($1 \leq j \leq N-1$) e y_i ($i \leq j$) son estocásticamente independientes si y sólo si $H(y) = 1 - \xi^a y^{-a}$ para algún $a > 0$ ". Este teorema 4 se reduce al de Molik si $i = j$, pero sin la hipótesis de continuidad absoluta de H formulada por éste.

Además, en el trabajo que comentamos, Samanta relaciona la distribución de Pareto con la distribución exponencial a través de una simple transformación, manifestada en el siguiente teorema:

"Lema 1: Sea la variable aleatoria Y que sigue una distribución de Pareto y , por ello, tiene por función de densidad:

$$\phi(y) = k\xi^k y^{-k-1} \text{ si } y \geq \xi, \xi > 0, k > 0 \quad (= 0 \text{ en otro caso})$$

si la variable aleatoria x tiene por función de densidad:

$$h(x) = ae^{-a(x-\theta)} \text{ si } x \geq \theta, a > 0 \quad (= 0 \text{ en otro caso})$$

entonces, la variable aleatoria Z , definida por $Z = e^X$ tiene por función de densidad $a\phi$, $Y = Z$, con $k \neq a$ y $\xi = e^\theta$, y recíprocamente." Como resalta Samanta, a partir de este teorema, cualquier teorema de caracterización de la distribución exponencial puede ser utilizado para caracterizar a la distribución de Pareto. Son válidos, entonces, para caracterizar a la distribución de Pareto los teoremas de caracterización de la distribución exponencial que expusimos al tratar de esta distribución. En un trabajo posterior de Huang, titulado "A Note on Order Statistics from Pareto Distribution", y cuya reseña incluimos en la bibliografía general, este autor discute los supuestos en los que se basan los teoremas de Samanta, y profundiza en el análisis de la caracterización de una distribución de Pareto.

Una forma completamente diferente de plantear el problema de la caracterización de una distribución de Pareto, así como también de una distribución exponencial, ha sido recientemente propuesta por Berliner (1), en un trabajo presentado al 21º Congreso Internacional de Actuarios, celebrado en Suiza en 1980. Como indica su autor, "el artículo describe una de las raras ocasiones en que una observación estadística conduce a una modelización teórica (en el caso de Pareto) y no al revés". El trabajo procede a caracterizar a la distribución de Pareto, así como a la exponencial, por partes, a través de subdivisiones en los conjuntos en que se encuentran incluidas dichas distribuciones. En la primera parte del mismo, una extensa clase de funciones de distribución, que incluye a la de Pareto, es obtenida a partir de ciertas observaciones estadísticas de siniestros ocurridos, y ciertas hipótesis, restrictivas, pero pausibles. La parte II

(1) Berliner, Baruch: Deriving the Pareto and Exponential Distribution Function from Classified Observation Data: A New Approach. Memorias del 21º Congreso Internacional de Actuarios. Zurich-Lausanne, 1980. Tema 2. Volumen 2. Pag. 31-42

incluye conclusiones prácticas interesantes de las anteriores, para, en la parte IV, proceder a la caracterización de la función de distribución exponencial.

Berliner comienza estableciendo una clasificación de los datos observados empíricamente, de la siguiente forma.

<u>Número de Clase</u>	<u>Clase (en ciertas unidades monetarias)</u>	<u>Observaciones de siniestros</u>
1	C-2C	$x_{11}x_{12}\dots x_{1n(1)}$
2	2C-4C	$x_{21}x_{22}\dots x_{2n(2)}$
3	4C-8C	$x_{31}x_{32}\dots x_{3n(3)}$
...

donde $n(i)$ es el número observado de siniestros en la clase i . "Se ha observado que el logaritmo de la media geométrica en cada clase es casi linealmente dependiente del logaritmo del número de siniestros en dicha clase, conforme nos movemos de una clase a otra". Es decir, $\log G(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)})$ es linealmente dependiente de $\log n(i)$. Se procede a un ajuste mínimo-cuadrático lineal de los valores observados. "La desviación de las observaciones con respecto a la recta será menor conforme mayor sea el número de siniestros en cada clase, y las cuantías de los siniestros pueden ser descritas de la mejor forma a través de la distribución de Pareto". La ecuación de la recta es:

$$\log \sqrt[n(i)]{\prod_{k=1}^{n(i)} x_{ik}} = \frac{1}{n(i)} \sum_{k=1}^{n(i)} \log x_{ik} = -a \log n(i) + b, \quad a > 0, b > 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\text{Hipótesis A: } \sqrt[n(i)]{\prod_{k=1}^{n(i)} x_{ik}} = 2^{i-1} \sqrt[n(1)]{\prod_{k=1}^{n(1)} x_{1k}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Operando en estas relaciones, se obtiene:

$$n(1) = 2^{i/a} \{H(2^i c) - H(2^{i+1} c)\} \quad (3)$$

"Una restricción natural de todas las funciones que satisfacen la ecuación (3) es la clase de funciones para las cuales:

$$H(x) - H(2x) = 2^{i/a} \{H(2^i x) - H(2^{i+1} x)\} \quad \text{para } x \geq c, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Las ecuaciones en diferencias (4), junto con la ecuación (3), son satisfechas por la ecuación de Pareto, donde

$$H(x) = H(c) (x/c)^{-\alpha} \quad y$$

$$(x/c)^{-\alpha} - (2x/c)^{-\alpha} = 2^{i\alpha} \{ (2^i(x/c))^{-\alpha} - (2^{i+1}(x/c))^{-\alpha} \}$$

para todo $x \geq c$.

Hipótesis B: Sea la ecuación (4) válida para todo $x \geq c > 0$ e $i = 0, 1, 2, \dots$

Hipótesis C: Sea $0 < H(c) < \infty$, la función $H(x) = H(c)(1-F(x))$ definida en el dominio $[c, \infty)$ y $F(x)$ una función de distribución.

Esta hipótesis expresa que $H(x)$ es el número esperado de siniestros en exceso de x . $H(x)$ se puede expresar siempre de la siguiente forma:

$$H(x) = 2^\alpha H(2x) + g(x), \text{ donde } g(x) \text{ es una función arbitraria (5),}$$

Teorema: $g(x) = 0$ para todo $x \geq c$.

Haciendo transformaciones elementales en la ecuación (5), se llega a:

$$H(x) = (2^\alpha)^i H(c)(1-F(2^i x)) \quad (6)$$

con $0 < c \leq x < \infty$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $H(c) < \infty$ y $F(x)$ una función de distribución.

La función de distribución de Pareto verifica esta ecuación, pero también la verifican otras funciones. La clase de todas las funciones que verifican la ecuación (6) para valores dados de los parámetros c y α está caracterizada por la ecuación (1) correspondiente a una división de datos por clases de tipo geométrico, así como por las hipótesis A, B y C, y viceversa.

¿Cuál es la clase de funciones que verifican la ecuación (6)? Berlinger demuestra que es la clase de todas las funciones positivas no-crecientes $H(x)$, $x \in [c, 2c)$, que verifican

$$H(2^i x) = (2^\alpha)^i H(x) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad x \geq c > 0$$

entre las cuales se encuentra la de la distribución de Pareto, pero así mismo, otras de distribuciones distintas a la de Pareto. Se pregunta Berlinger, "¿Cómo podemos restringir las condiciones iniciales de tal forma que ello conduzca únicamente a la función

de distribución de Pareto?". Mediante la siguiente clasificación geométrica de los datos:

Número de clase	Clase	Observaciones de siniestros
1	c-uc	$x_{11}x_{12}\dots x_{1n(1)}$
2	uc-u ² c	$x_{21}x_{22}\dots x_{2n(2)}$
...
k	u ^{k-1} c-u ^k c	$x_{k1}x_{k2}\dots x_{kn(k)}$
...

"Hipótesis D: Sea $c > 0$ fijo y $u > 1$ una variable con dominio $(1, \infty)$ que caracteriza la división geométrica en clases de los datos observados".

Supongamos la validez de la ecuación lineal (1), con los parámetros a y b independientes de n , para todo $i = 1, 2, \dots$ y adoptemos las ecuaciones:

$$\sqrt[n(i)]{\prod_{k=1}^{n(i)} x_{ik}} = u^{i-1} \sqrt[n(1)]{\prod_{k=1}^{n(1)} x_{1k}} \quad \text{para } 1 < u < \infty$$

y

$$H(x) - H(ux) = u^{i/a} \{H(u^i x) - H(u^{i+1} x)\}$$

para $x \geq c$, $i = 0, 1, 2, \dots$ y $1 < u < \infty$, así como la hipótesis C. A través de todas estas hipótesis se llega al siguiente teorema de caracterización:

"Teorema: La hipótesis D conduce a la función de distribución de Pareto para las cuantías de siniestros".

De esta caracterización y del desarrollo general que ha conducido a la misma, obtiene Berliner algunas reglas de utilidad práctica:

"1/ Si esperamos que la distribución de la cuantía de los siniestros se comporte conforme al modelo de Pareto o próximo a él, podemos hacer uso de una clasificación de datos de tipo geométrico y representar una figura en la que en el eje de abscisas figure $\log n(i)$ y en el de ordenadas el logaritmo de la media geométrica de datos para cada clase. De esta forma, se aprecia de una manera inmediata si el comportamiento de los datos es li-

neal o no, comportándose entonces (o no) conforme al modelo de Pareto.

2/ Una clasificación geométrica como la propuesta presenta la ventaja de que las clases serán tan extensas como en realidad sean. De ello se deduce que el número de siniestros $n(i)$ en cada clase no desciende radicalmente conforme incrementamos el número de clases, i ".

Así mismo, mediante la hipótesis se llega a incluir el efecto de la inflación sobre el coste de los siniestros dentro del modelo, inflación que produce un desplazamiento en la recta por la amplitud de un periodo temporal, y, en consecuencia, afecta a la ordenada en el origen de la misma, pero no a su pendiente angular.

Por último Berliner logra caracterizar a la distribución exponencial mediante una clasificación de datos en clases cuya amplitud es constante, y, en consecuencia, cuyos extremos varían en progresión aritmética, de la siguiente forma:

Número de clase	Clase	Observaciones de siniestros
1	0-u	$x_{11}x_{12}\dots x_{1n(1)}$
2	u-2u	$x_{21}x_{22}\dots x_{2n(2)}$
...
k	(k-1)u-ku	$x_{k1}x_{k2}\dots x_{kn(k)}$
...

y el establecimiento de hipótesis de características similares a las anteriores.

Trabajos sobre la distribución de Pareto

Uno de los más antiguos trabajos sobre la distribución de Pareto y sus aplicaciones actuariales, si no el más antiguo, es el de Hagstroem titulado "La loi de Pareto et la réassurance" y publicado en 1925, cuya reseña incluimos en la bibliografía general. Este mismo autor ha publicado otros artículos sobre la distribución que consideramos, entre los que destaca "Remarks on Pareto Distributions". al que nos hemos referido al hablar de las convoluciones de distribuciones de Pareto, artículo que introduce aportaciones de interés sobre la ley considerada. En el mismo,

Hagstroem destaca dos propiedades de la distribución de Pareto que juzga de interés. Una, la independencia de los valores de la función de distribución respecto de la unidad de medida de la variable. La segunda propiedad consiste en que, en palabras de Hagstroem, "la transformación que me he tomado la libertad de llamar la "transformación actuarial de una variable aleatoria" admite la interpretación de una distribución de ingresos como resultado de una lucha por la supervivencia, donde la intensidad de desaparición es dada por $\mu(x) = k/x$, siendo la probabilidad de "supervivencia" determinada a través de la relación:

$$S(x) = \exp \left\{ - \int_{x_0}^x (k/t) dt \right\} = (x/x_0)^{-k}$$

La propiedad característica de las distribuciones de Pareto es mejor interpretada si, en vez de considerar la probabilidad como medida de la aleatoriedad, consideramos el logaritmo negativo de la probabilidad. Para esta función, resulta apropiada la expresión de "rareza" (rarity) o "grado de imposibilidad". Si por $S(x)$ representamos la probabilidad de que la variable X sea igual o mayor que x , la "rareza" o "imposibilidad" de que X adopte valores mayores que x es, consecuentemente dada por: $-\log S(x) = \log (1/S(x))$. Pues bien, la distribución de Pareto se caracteriza porque la "rareza" es proporcional a $\log x$ cuando se toma como mínimo valor de la variable la unidad monetaria, $x_0 = 1$. En efecto, en ese supuesto, $S(x) = x^{-k}$, luego $-\log S(x) = k \log x$. El mayor interés del trabajo de Hagstroem que comentamos radica en su análisis de la convolución de una distribución de Pareto, cuya importancia nos hizo destacar este tema en un apartado independiente.

Como se ha venido comentando a lo largo del estudio realizado sobre la distribución de Pareto, Malik ha sido uno de los autores que más trabajos han publicado sobre esta distribución. Al margen de su "Distribution of Product Statistics from the Pareto Distribution", cuya reseña recogemos en la bibliografía general, y de los diversos artículos que se han venido comentando juzgamos de interés referirnos a su trabajo "Exact Moments of Order Statistics from the Pareto Distribution"(1). En él, Malik ob-

(1) Malik, Hnerick John: Exact Moments of Order Statistics form the Pareto Distribution. Skand. Aktuar. n°49. 1966. Haft 3-4
Pag. 144-157

tiene la función característica del k -ésimo valor ordenado de una muestra aleatoria, expresando los momentos con relación al origen de dicho estadístico en términos de una función gamma. Así mismo, obtiene distintas relaciones de recurrencia entre los valores esperados de los distintos elementos ordenados. Por último, analiza distintas aplicaciones de los resultados obtenidos a la estimación de los parámetros de una distribución de Pareto mediante muestras ordenadas, incluyendo distintas tablas de valores esperados y varianzas de los estadísticos ordenados de una muestra aleatoria procedente de una población que sigue una distribución de Pareto. Al obtener dichos momentos, Malik sigue un proceso de integración directa. Sin embargo, dicho método se complica extraordinariamente al calcular los momentos de más de dos variantes ordenadas. Para subsanar esta dificultad, Kabe (1) ha propuesto un método en el cálculo de las integrales múltiples que aparecen en las distribuciones de los estadísticos ordenados que transforma las variantes ordenadas en variantes no ordenadas. Así la transformación propuesta por Kabe es la siguiente: Transformemos la muestra ordenada procedente de una población de Pareto, con función de densidad: $f(x) = va^v x^{-v-1}$ para $x \geq a$, $a > 0$, $v > 0$ en la muestra ordenada: $0 < t_1 < \dots < t_N < \infty$ correspondiente a la distribución de Pareto: $f(t) = v/(1+t)^{v+1}$ con $v > 0$, $0 < t < \infty$. Entonces definamos la transformación: $t_i = \sum_{j=1}^i y_j$ con $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, siendo el jacobiano la unidad en la transformación de las variables ordenadas t en las variables no ordenadas y . La transformación: $z_i = (1+y_1+\dots+y_{i-1})/(1+y_1+\dots+y_i)$ con $i = 1, \dots, N$ e $y_0 = 0$ tiene por jacobiano:

$$J(y; z) = \prod_{i=1}^N z_i^{-(N-i+2)}$$

y, en opinión de Kabe, simplificaba considerablemente el cálculo de las integrales múltiples correspondientes a las variantes y , teniendo las variantes z distribuciones beta estocásticamente independientes.

(1) Kabe, D. G.: On Moments of Order Statistics from the Pareto Distribution. Skand. Aktuar. 1972. n°2. Pag. 179-181

Thorin (1) ha analizado la divisibilidad infinita de la distribución de Pareto. Una generalización de los planteamientos de divisibilidad infinita, que abarca de manera importante a la distribución de Pareto, la encontramos en el trabajo de Goovaerts, D'Hooge y De Pril (2). El método propuesto por estos autores se basa en algunos importantes nuevos desarrollos de las transformadas de Laplace en el entorno del origen.

Un importante trabajo sobre la aplicación al seguro de la distribución de Pareto es el de Gunnar Benktander titulado "Notes sur la distribution conditionnée du montant d'un sinistre par rapport à l'hypothèse qu'il y a eu un sinistre dans l'assurance automobile" (The Astin Bulletin. Vol. II. Enero 1962).

Otro artículo a reseñar sobre esta distribución es el de Prieto Pérez (3), en él su autor define a la distribución de Pareto y sus momentos fundamentales, para detenerse, una vez comprobada la bondad del modelo para la determinación de la distribución de la cuantía del daño por siniestro en un intervalo (x_0, ∞) en el análisis de los problemas que plantea el cálculo de la prima del reaseguro "excess-loss" en el Seguro del Automóvil. Para ello, hace uso de los datos obtenidos por Benktander en el trabajo que acabamos de reseñar.

Otro importante trabajo, de interés desde el punto de vista práctico, es el de Benckert y Jung (4), referido a las distribuciones de siniestros en el seguro de incendios. Sus autores parten de la experiencia estadística aportada por compañías suecas

(1) Thorin, Olof: On the Infinite Divisibility of the Pareto Distribution. Scandinavian Actuarial Journal. 1977. nº1. Pag. 31-40

(2) Goovaerts, M.J.-D'Hooge, L.- De Pril, N.: Some New Results on Infinite Divisibility. Transactions of the 29 th International Congress of Actuaries. Tokyo, 1976. Volume 4. Pag. 539-543

(3) Prieto Pérez, Eugenio: Distribución de Pareto. Aplicaciones al seguro. Estadística Española. nº43. Abril-Junio 1969. Pag. 63-70

(4) Benckert, Lars- Gunnar- Jung, Jan: Statistical Models of Claim Distributions in Fire Insurance. The Astin Bulletin. Vol. VIII. Part. Septiembre 1974. Pag. 1-25

que trabajaron en el ramo de incendios no industriales durante el período 1958-1969. En concreto, las estadísticas utilizadas se referían a 78.940 siniestros producidos en viviendas. tamaño muestral, que se puede juzgar, evidentemente, de suficiente. El interés desde el punto de vista técnico, de este trabajo radica en que Benckert y Jung clasificaron, según el tipo de construcción, a los edificios siniestrados en cuatro grandes apartados:

- 1.- Casas de piedra y ladrillo con suelos resistentes al fuego.
- 2.- Casas de piedra y ladrillo con suelos de madera.
- 3.- Casas de madera con paredes de yeso.
- 4.- Casas íntegramente de madera.

dando como consecuencia los siguientes ajustes óptimos:

- clase 1: Distribución lognormal.
- clase 2: Parcialmente, distribución lognormal.
- clase 3: Entre la distribución lognormal y la de Pareto.
- clase 4: Distribución de Pareto.

Se aprecia claramente, por lo menos a través de los datos aportados por este trabajo, que, en el seguro de incendios no industriales, los modelos más adecuados en el análisis de la distribución de la cuantía de las indemnizaciones son el lognormal y el de Pareto, más adecuado el primero para las situaciones de menor riesgo y más apropiado el de Pareto en los elementos de mayor riesgo, es decir (casas de madera), en los expuestos al riesgo más "indefensos" ante el mismo. Esto viene siendo una constante en las modelizaciones de riesgo a través de la distribución de Pareto, como vamos teniendo la oportunidad de comprobar a lo largo de nuestro análisis.

Por último, una reciente aplicación de la distribución de Pareto es la aportada por Ferrara y Quario (1) en su análisis de la distribución del número de siniestros en el seguro del automóvil a través del estudio de los periodos temporales en los que no

(1) Ferrara, G.- Quario, G.: Distribution of the Number of Claims in Motor Insurance according to the Lag of Settlement. The Astin Bulletin. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero 1977. Pag. 119-124

se produce siniestro alguno. La técnica seguida por estos autores es por completo análoga a la del seguro de vida, por lo que definen el ratio $\mu(x) = -l'(x)/l(x)$ como el de intensidad de siniestralidad (análoga a la "fuerza de mortalidad") y establecen la hipótesis de que $\mu(x) = K l^\beta(x)$, con K y β constantes positivas. La integración de dicha ecuación conduce a:

$$l(x) = \left(\frac{x_0}{x+x_0} \right)^\alpha \quad \text{para } x \geq 0, \alpha < 0, x_0 > 0$$

y, mediante la traslación $y = x+x_0$, se obtiene, finalmente, la función de Pareto:

$$l(x) = \begin{cases} (x_0/x)^\alpha & \text{para } x \geq x_0 \\ 1 & 0 \leq x < x_0 \end{cases}$$

II.2.2.5.- DISTRIBUCION DE LOS POLINOMIOS EXPONENCIALES

Con la finalidad de resolver el complejo problema de pasar a la distribución del daño total, y obtener una expresión práctica para la misma, Almer ((1) y (2)) ha propuesto la siguiente distribución:

$$g(x) = \alpha_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x} + \dots + \alpha_k \beta_k e^{-\beta_k x}$$

es decir, una combinación lineal de distribuciones exponenciales $f_i(x) = \beta_i e^{-\beta_i x}$, $i = 1, 2, \dots, k$, siendo

$\int_0^\infty g(x) dx = 1$, es decir, $g(x)$ una auténtica función de densidad, y $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, es decir, la combinación lineal, convexa.

-
- (1) Almer, Bertil: Risk Analysis in Theory and Practical Statistics. Transactions of the XV International Congress of Actuaries. New York, 1957. Volume 2. Pag. 314-370
- (2) Almer, Bertil: Modern General Risk Theory. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. II. Febrero 1967. Pag. 136-169.

De 0 a 100 siniestros dentro de cada clase de riesgo:							
							Un tetranomio exponencial (k=4)
100-1000	"	"	"	"	"	"	: Un trinomio exponencial (k=3)
1000-10.000	"	"	"	"	"	"	: Un binomio exponencial (k=2)
10.000-50.000	"	"	"	"	"	"	: Un monomio exponencial (k=1)
>50.000	"	"	"	"	"	"	: Distribución normal"

II.2.2.6.- DISTRIBUCION DE ESSCHER

Una distribución para el seguro de incendios no industriales, utilizada en Suecia por Esscher, según viene recogido en el libro de Cramér (1), es la siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} A e^{-\alpha x} + B(x+b)^{-\beta} & \text{para } 0 < x \leq 500 \\ 0 & \text{para } x > 500 \end{cases}$$

encontrando los siguientes valores, a partir de los datos disponibles del periodo 1948-1951.

$$\begin{aligned} A &= 4,897954 & \alpha &= 5,514588 \\ B &= 4,503 & \beta &= 2,75 \\ & & b &= 6 \end{aligned}$$

Procede Cramér en el trabajo reseñado, a obtener aproximaciones a la distribución del daño total $F(x,t)$ a partir de dicha distribución de indemnizaciones por incendios no industriales y, así mismo, al cálculo de valores para la probabilidad de ruina $\psi(u)$ correspondiente, comparando los valores obtenidos con los de otras distribuciones, concretamente de la distribución exponencial.

II.2.2.7.- DISTRIBUCION DE LA INTENSIDAD DEL DAÑO

Un trabajo clásico sobre la distribución de la cuantía de un siniestro, referido al seguro de incendios, es el de Benckert y Sternberg (2). En él, en vez de trabajar con la cuantía del daño producido por un siniestro (un incendio en concreto), se

-
- (1) Cramér, Harald: Collective Risk Theory. A survey of the Theory from the Point of View of the Theory of Stochastic Processes. The Jubilee Volume of Forsakringsaktiebolaget Skandic 1955. Pag
- (2) Benckert, Lars G.- Sternberg, Ingrid: An Attempt to Find an Expression for the Distribution of Fire Damage Amount. Transactions of the XV International Congress of Actuaries. New York, 1967 Volume 2. Pag. 288-296

trabaja con la intensidad del daño, que Benckert define en forma análoga a la intensidad de mortalidad en el fenómeno de la supervivencia. Se establece la hipótesis de que tal intensidad del daño es inversamente proporcional no sólo al daño producido, sino también al que queda por producirse, es decir, la parte de bien asegurado que queda por quemarse. De esta forma, si por $v(x)$ expresamos a la intensidad del daño en función de la parte destruida de x , del total por destruir V , tendremos que:

$$v(x) = K / x^{\alpha}(1-x)^{\beta} \quad \text{donde } \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

Entonces, si ξ es la variante "cuantía del daño producido por un incendio" y $S(x) = P(\xi > x)$ expresa la probabilidad de que tal siniestro sea de magnitud económica (indemnización) superior a x , se verificará:

$$S(x) = e^{-\int_{x_0}^x v(x) dx} = e^{-\int_{x_0}^x (K/x^{\alpha}(1-x)^{\beta}) dx}$$

y la función de distribución de ξ será: $F(x) = 1-S(x)$, siendo en consecuencia su función de densidad:

$$g(x) = -S'(x) = e^{-\int_{x_0}^x v(x) dx} \cdot v(x) = e^{-\int_{x_0}^x (K/x^{\alpha}(1-x)^{\beta}) dx} \cdot \frac{K}{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}}$$

Como es fácil apreciar, la distribución de Pareto resulta ser un caso particular de esta distribución. En efecto, si en ella hacemos $\beta = 0$, $\alpha = 1$, tendremos:

$$v(x) = K/x; \quad S(x) = \exp \left\{ -K \int_{x_0}^x dx/x \right\} = \exp \{ -K \log(x/x_0) \} = (x_0/x)^K$$

que es la distribución de Pareto, con función de distribución:

$$F(x) = 1 - (x_0/x)^K.$$

Los autores, en base a los datos recogidos por Sternberg, referentes a edificios de viviendas en el Sur de Suecia, datos que fueron subdivididos en grupos de acuerdo con el valor, clase de construcción y calidad de las defensas contra incendios, formularon, como hipótesis de trabajo, la distribución de la cuantía del siniestro a través de la función de densidad:

$$\begin{aligned} s(x) &= (\alpha-1)x^{-\alpha} & \text{para } 1 \leq x < v. \\ s(x) &= v^{1-\alpha} & \text{para } x = v. \end{aligned}$$

donde v es el máximo valor destruible en cada subgrupo. A esta

función la denomina Philipson (1) función de Pareto "condensada" ("condensed" Pareto function), debido a que la "cola está "condensada" en el punto correspondiente a $x = v$ ".

Benckert y Sternberg procedieron al contraste de dicho modelo con la realidad de los datos obtenidos y a la estimación del parámetro α , para cada grupo, por el método de la máxima verosimilitud, dando como estimador:

$$\alpha^* = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log x_i + (N-n) \log v}$$

siendo: n el tamaño muestral, v el máximo valor destruable, es decir, el valor del edificio y $N-n$ el número de los elementos muestrales x_i que alcanzan la máxima siniestralidad, v .

II.2.2.8.- DISTRIBUCION DE WEIBULL

La distribución de Weibull se define como una distribución continua cuya función de densidad es:

$$f(x) = a(ax)^{\alpha-1} e^{-(ax)^\alpha} \quad \text{con } a > 0.$$

Para el caso en que $\alpha = 1$, $f(x) = ae^{-ax}$, es decir, se reduce a una distribución exponencial, que resulta ser así un caso particular de una distribución de Weibull. Otros autores prefieren expresar la función de densidad de esta distribución de la siguiente forma:

$$f(x) = m\alpha_2^{-m}(x-\alpha_1)^{m-1} \exp \{-\alpha_2^{-m}(x-\alpha_1)^m\} \quad \text{para } x > \alpha_1$$

e, incluso, se denomina frecuentemente distribución de Weibull con tres parámetros a la que tiene por función de densidad:

$$f(x) = (\delta/\theta)(x-G)^{\delta-1} \exp \{-(x-G)^\delta/\theta\} \quad \text{para } x > G, \theta > 0, \delta > 0$$

(1) Philipson, Carl: Analytical Expressions of Risk Involved in General Insurance. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. I Diciembre 1958. Pag. 32-41

Si el parámetro $\delta = 1$, obtenemos de nuevo una distribución exponencial negativa, $f(x) = (1/\theta) \exp \{-(x-G)/\theta\}$ con origen G y parámetro de escala θ .

La distribución de Weibull se encuentra suficientemente desarrollada, en sus distintos elementos, en la mencionada obra de Joseph Kupper, titulada "Wahrscheinlichkeits theoretische Modelle in der Schadenversicherung" y publicada en 1962 (pag. 63 y siguientes). Limitémonos por tanto, por no hacer excesivamente extenso este trabajo a considerar el aspecto de esta distribución que ha merecido mayor interés por parte de los investigadores, cual es el de la estimación de sus parámetros.

El problema de la estimación de los parámetros de una distribución de Weibull ha merecido la atención de múltiples investigadores en las últimas décadas. Así, Kimball ha procedido a su estimación a través de métodos gráficos; los estimadores por máxima verosimilitud han sido obtenidos por Cohen, Menon y Harter, éste último en colaboración con Moore. Por su parte, han obtenido estimadores mínimo-cuadráticos White, McCool y Down. Así mismo, distintos autores, entre los que citaremos únicamente a Dubey y Hassanein, se han ocupado de obtener estimadores de los percentiles en una distribución de Weibull. Por último, Hassanein y Legler han tratado de obtener los límites óptimos de estratificación en un muestreo estratificado sobre una población de Weibull, es decir, de obtener los estratos de minimizan la varianza del estimador de la media en una población de Weibull, cuando tal estimador se obtiene a partir de una muestra aleatoria estratificada. Todos estos trabajos aparecen reseñados en la bibliografía general de este trabajo. Nos limitaremos nosotros a presentar brevemente los elementos fundamentales de un trabajo relativamente reciente sobre esta distribución. Nos referimos al trabajo de Schafer (1) en el que su autor establece un contraste de hipótesis sobre el parámetro G (origen de la distribución) en una dis-

(1) Schafer, Dick B.: A Note on a Simple test function for the Weibull Distribution Location Parameter. S.A.J. 1975. Pag. 1-5

tribución de Weibull. Para ello, Schafer define la función de contraste simple:

$$S = \frac{t_a - G_0}{t_b - t_a}$$

según el método establecido por S.D. Dubey, en un trabajo ya reseñado, donde $t_1 \leq \dots \leq t_a \leq \dots \leq t_b \leq \dots \leq t_n$ es una muestra aleatoria ordenada procedente de una población de Weibull. Schafer determina la función de densidad del estadístico S, así como la función de potencia para $G_1 \geq G_0$, donde la hipótesis nula es: $H_0: G = G_0$, y su alternativa es $H_1: G = G_1 \neq G_0$.

Por último, expresamos que los sistemas de curvas de Pearson y el más moderno sistema de Kapteyn (al que ya nos hemos referido al hablar de la distribución logarítmico-normal, y cuyo menor número de parámetros la hace más manejable), proporcionan, así mismo, interesantes distribuciones para la cuantía del daño producido por un siniestro.

Digamos para finalizar esta apartado que hemos hecho un recorrido, si no completo, sí al menos suficiente, sobre el importante tema del establecimiento de la distribución de la cuantía del daño (indemnización monetaria) producido por un siniestro. Ya tenemos configuradas las dos distribuciones básicas del proceso general de riesgo: la distribución del número de siniestros, por un lado, y la distribución de la cuantía del daño producido por un siniestro, por otro. Falta ahora relacionar ambas distribuciones básicas en una distribución que nos hable de la cuantía del daño total para el ente asegurador, es decir, del montante del conjunto de indemnizaciones producidas. A ese objetivo destinamos el apartado siguiente.

II.3.- DISTRIBUCION DE LA CUANTIA DEL DAÑO PARA n SINIESTROS

Como hemos indicado más de una vez, concretamente al tratar del proceso general de riesgo, nuestro objetivo básico, a efectos de tarificación estadística, es la determinación de la distribución del daño total, por cuanto que, a groso modo, la prima de riesgo se definirá como el valor probable de dicha distribución. En el análisis de dicha distribución del daño total, vamos a dar un paso previo, cual es la especificación, por hipótesis, de un valor para el número de siniestros, n . De esta forma, se trata de analizar la distribución del daño total (no de un sólo siniestro), pero cuando se desaleatoriza la variante número de siniestros producidos, asignándole un valor, n .

Supongamos que se han producido n siniestros. Representaremos por $V(x/n)$ a la distribución de probabilidad de la cuantía del daño total producido por esos n siniestros. Si la cuantía del daño o siniestro i -ésimo viene dada por la variable aleatoria ξ_i , es evidente que la variante que recoga la cuantía del daño total para los n siniestros será:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

En el análisis de la distribución de dicha variante ξ se presentan dos casos fundamentales:

- a/ Que la cuantía de cada siniestro, ξ_i , sea independiente del número (n) de ellos producidos. En tal caso, es obvio que las variantes ξ_i serán estocásticamente independientes entre sí, por lo que la distribución de ξ será la convolución de ellas, y supuesto que todas ellas están igualmente distribuidas, la convolución n -ésima de cada una de ellas, es decir la distribución buscada será:

$$V_n(x) = V(x/n) = V^{n*}(x) = V(x) \cdot V(x) \dots V(x)$$

* A dicha función también se le suele representar por $G(x/n)$ o por $S(x/n)$, siendo, así mismo, frecuente la representación $V_n(x)$, $G_n(x)$ o $S_n(x)$, respectivamente.

Por ejemplo, si la distribución de la cuantía de cada siniestro sigue la ley gamma, $\gamma(\alpha, c)$, como en esta ley, según tuvimos ocasión de ver, la convolución n -ésima es también gamma con parámetros $\gamma(n\alpha, c)$, se tendrá:

$$V_n(x) = V(x/n) = V^{n*}(x) = f(x, n\alpha, c) = \frac{c^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-cx}, \quad x > 0$$

con parámetros: $\mu = \frac{n\alpha}{c}; \quad \sigma^2 = \frac{n\alpha}{c^2}$

b/ Cuando la cuantía de cada siniestro depende del número de ellos producidos, no es admisible la hipótesis de independencia entre las variantes sumandos, y la distribución del daño total ya no es, obviamente, la convolución n -ésima de la distribución de uno cualquiera de ellos. Tal sucede, por ejemplo, cuando consideramos el daño para cada casa incendiada dependiente del número de focos de incendio que se hayan producido. Cuando un gran número de casas han sufrido daños por el fuego, se da también un efecto de contagio en las cuantías de los daños, y no sólo en el número de siniestros, ya que si se han siniestrado muchas casas, la cuantía del daño producido en cada una de ellas es mayor que si se tratase de un pequeño incendio.

La solución dada por Saxer (1) en el análisis de la distribución del daño total es la siguiente:

$$f(x/n) = \frac{(n^r c) \gamma n^{1+2r}}{\Gamma(\gamma n^{1+2r})} x^{\gamma n^{1+2r}-1} e^{-cn^r x} \quad \text{para } x > 0$$

cuya función característica es:

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{cn^r} \right)^{-\gamma n^{1+2r}}$$

(1) Saxer, Walter: Versicherungsmathematik. Tomo 2. Pag. 93

con parámetros:

$$\text{Valor probable} = \frac{\gamma}{c} n^{1+r}$$

$$\text{Varianza} = \frac{\gamma}{c^2} n$$

Para el caso en que $r = 0$, $f(x/n)$ coincide con la convolución n -ésima de la distribución gamma. Es preciso observar que este contagio se acusa fundamentalmente en el valor probable, pues la varianza no depende de r .

II.4.- DISTRIBUCION DEL DAÑO TOTAL

La distribución del daño total ("distribution of the total amount of claims" en la terminología inglesa) es la distribución de probabilidad de la siniestralidad total en la cartera del ente asegurador en el transcurso del periodo considerado, es decir, la distribución de la cuantía del daño total (o porcentual) ocasionado por todos los siniestros acaecidos a lo largo del tiempo actuarial considerado. Se trata, por tanto, de la distribución de probabilidad del proceso general de riesgo, que definimos en su momento. Es la distribución básica a determinar, pues es lo que establece el coste del riesgo, en base al cual se establecen las tarificaciones correspondientes.

Supongamos que, en el transcurso del tiempo actuarial t , se producen n siniestros, y representemos por x_k la variante que exprese la cuantía del k -ésimo de ellos. El proceso general de riesgo, la cuantía del daño total en el periodo de amplitud t , vendría expresada mediante la variante:

$$X(t) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

variante que depende de dos variables fundamentales: el número de siniestros, n , y la cuantía de los mismos, x_k . A las distribuciones de probabilidad de dichas variantes las hemos denominado distribuciones básicas del proceso de riesgo, y son:

P_n , función de cuantía (distribución discreta) de la distribución de probabilidad del número de siniestros, que nos expresa la probabilidad de que, en el tiempo actuarial correspondiente, se produzcan n siniestros, y

$V_{x_k}(x)$, función de distribución (distribución continua) de la distribución de probabilidad de la cuantía del siniestro x_k , y que, en consecuencia, nos expresa la probabilidad de que el siniestro k -ésimo comporte una indemnización que no exceda de x unidades monetarias, es decir, $P(X_k \leq x)$.

Si representamos por $V(x/n) = V_n(x)$ a la función de distribución de la distribución del daño total condicionada a que se hayan producido n siniestros, $V_n(x) = P\left(\bigcup_{i=1}^n x_i \leq x\right)$, se verifica que la distribución del daño total vendrá definida por la función de distribución:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n V_n(x)$$

que, en la hipótesis de independencia de las variantes sumandos x_i , será:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n V_n^*(x)$$

siendo $V_n^*(x)$ la convolución n -ésima de $V(x)$, que verifica la relación de recurrencia:

$$V_n^*(x) = \int_0^x V_{n-1}^*(x-z) dv(z)$$

con

$$V_0^*(x) = \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$V_1^*(x) = V(x)$$

Es de notar que Cramér y los demás autores suecos (Bohman, Esscher, etc.), definen la función de distribución del daño total, $F(x, t)$, referida al intervalo de tiempo durante el cual el número esperado de siniestros se incrementa de 0 a t , es decir, referida a un tiempo operacional t . Por tanto, $F(x, t)$ expresa la probabilidad de que la cuantía total de los siniestros indemnizados por la entidad correspondiente sea x , cuando el número esperado de siniestros es t . De esta forma, $F(x, t)$ se define mediante la relación:

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V_n^*(x)$$

donde $P_n(t)$ expresa la probabilidad de que se produzcan n siniestros, cuando el número esperado de siniestros (valor probable de dicha distribución) es t y $V_n^*(x)$ es la convolución n -ésima de $V(x)$, función de distribución de la cuantía de los siniestros.

Recordemos que uno de los modelos fundamentales que se introdujeron para analizar la distribución del número de siniestros era la distribución de Poisson compuesta. A través de ella, se define a la función de cuantía $P_n(t)$ en la forma:

$$P_n(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dU(\lambda)$$

donde $U(\lambda)$ es una función de distribución con valor probable 1.

A partir de esta distribución, se manifiesta la existencia de dos casos especialmente importantes, según sea la expresión de la función $U(\lambda)$. Si

$$U(\lambda) = \varepsilon(\lambda-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < 1 \\ 1 & \text{si } \lambda \geq 1 \end{cases}$$

entonces:

$$P_n(t) = \frac{e^{-t} t^n}{n!}$$

es decir, una distribución de Poisson simple.

Por su parte, si $U(\lambda)$ es del tipo III de Pearson, es decir, si:

$$U(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{\lambda k} e^{-z} z^{k-1} dz$$

entonces:

$$P_n(t) = \binom{-k}{n} \left(-\frac{t}{t+k}\right)^n \left(\frac{k}{t+k}\right)^k$$

es decir, corresponde a una distribución binomial negativa.

De estos dos casos, el que se suele considerar más importante es el primero, es decir, aquél en que $P_n(t)$ se distribuye como una Poisson con parámetro t . En este caso, la distribución del daño total adopta la forma:

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} t^n}{n!} v^{n*}(x)$$

A esta distribución, verdaderamente trascendental en la teoría del riesgo colectivo, se le suele denominar "función de Poisson generalizada" (generalized Poisson function), en contraposición con la función de Poisson ordinaria, en la que todos los siniestros tienen el mismo valor unitario, si bien, algunos autores prefieren denominarla "función de Poisson no elemental" (non-elementary Poisson function), en contraposición con la función de Poisson elemental, que es la ordinaria. Los autores que así se expresan, prefieren reservar el nombre de "generalizados" para determinados procesos de Poisson.

Diversos autores, entre los que se encuentra, por ejemplo, Pesonen (1) denominan "distribución compuesta de Poisson no elemental" (Non-elementary Compound Poisson Distribution) a la que tiene por función de distribución:

$$F(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda) S^{k*}(x), \text{ donde } \int_0^{\infty} dU(\lambda) = 1'$$

Se trata de la distribución del daño total cuando $S^{k*}(x)$ es la distribución de la cuantía del daño para k siniestros (independientes) y la distribución de Poisson compuesta modeliza el número de siniestros.

Como indican Beard, Pentikainen y Pesonen en la citada obra "Risk Theory" (pag. 22), "la función de Poisson generalizada es, desgraciadamente, utilizable directamente para los cálculos numéricos únicamente si se efectúan unas muy especiales hipótesis sobre la función $S(z)$ (expresiva de la cuantía de un siniestro), o si el número probable de siniestros \underline{n} , es muy pequeño. La principal dificultad de la teoría es encontrar aproximaciones o métodos de cálculo para esa distribución válidos a efectos de aplicaciones prácticas".

Antes de plantear el tema del análisis de dichas aproximaciones a $F(x,t)$, antes incluso de establecer los elementos fundamentales de dicha distribución, constatemos, siquiera sea someramente, la existencia de modelizaciones sobre dicha distribución distintas de las que hemos venido analizando. En este sentido, digamos que, al margen del modelo de la convolución, existe lo que Kupper (2) llama el modelo del producto. Suponiendo que la distribución de probabilidad de la variante bidimen-

(1) Pesonen, Erkki: NP-approximation of Risk Processes. Skand. Aktuar. 1968, n°3-4. Pag. 158-164. 1969, n°3-4. Supplement. Pag.63-69

(2) Kupper, J.: Wahrscheinlichkeits theoretische Modelle in der Schandernversicherung. 1962, Pag. 74

sional (ξ_1, ξ_2) viene definida por la función $f(x_1, x_2)$, la distribución de la variante producto vendrá dada por la función de distribución:

$$F(y) = P(\xi_1 \cdot \xi_2 \leq y) = \iint_{x_1 \cdot x_2 \leq y} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Para el caso en que las dos variantes marginales sean estocásticamente independientes entre sí, se verificará: $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$, con lo que, siendo $s_2 \leq y/x_1$, tendremos:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(y/x_1) dx_1 / |x_1|$$

que, para una variación positiva, será:

$$F(y) = \int_0^{\infty} f_1(x_1) f_2(y/x_1) dx_1 / x_1$$

La función característica de la variante producto, $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$, será:

$$\phi_{\eta}(t) = \phi_{\xi_1} \{ \log \phi_{\xi_2}(tx_1) / ix_1 \}$$

Esta función característica nos permite determinar el valor probable y la varianza de la variante producto η , que serán:

$$E(\eta) = E(\xi_1) \cdot E(\xi_2)$$

$$V(\eta) = V(\xi_1) \cdot V(\xi_2) + \{E(\xi_1)\}^2 V(\xi_2) + \{E(\xi_2)\}^2 V(\xi_1)$$

Si las variantes marginales no son estocásticamente independientes entre sí, únicamente es factible la sustitución:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f(x_2/x_1)$$

Kupper aplica este modelo del producto al seguro de accidentes, en donde la empresa asegurada comunica al ente asegurador el número total de accidentes, n , pero no los que ha sufrido cada uno de los N trabajadores individualmente. Se definen entonces las siguientes variantes:

$$\xi_1 = n/N = \text{frecuencia de accidente}$$

$$\xi_2 = T/n = \text{frecuencia de daño (donde } T \text{ expresa el coste total de accidentes)}.$$

La variante producto será entonces:

$$\eta = \xi_1 \cdot \xi_2 = \frac{n}{N} \cdot \frac{T}{n} = \frac{T}{N}$$

que nos expresa el coste medio de accidente por trabajador.

También se suele medir el daño en función del salario total L . En este caso, en lugar de la variante T/N , se utiliza la variante $T/N(L/N)$, con lo cual la variante producto será:

$$\eta = T/L$$

que nos expresa el coste medio por unidad de salario.

ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA DISTRIBUCION DEL DAÑO TOTAL

Valor probable de la distribución del daño total

Representamos por c_k al momento de orden k con relación al origen de la distribución $V(x)$ de la cuantía de un siniestro, es decir,

$$c_k = \int_0^{\infty} x^k dV(x)$$

En este sentido, el valor probable de dicha distribución será c_1 , que, en caso de estar $V(x)$ normalizado, como se suele hacer al definir $F(x,t)$, con tiempo operacional t , es $c_1 = 1$.

Sea $V_n^*(x)$, la convolución n -ésima de $V(x)$, es decir, la distribución de la variante suma $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ en la que ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, se distribuye conforme a $V(x)$ y siendo dichas variantes independientes dos a dos. El valor probable de $V_n^*(x)$ será entonces $n c_1$, al ser la esperanza matemática un operador lineal. De esta forma, el valor probable de la distribución del daño total será:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \int_0^{\infty} x dV_n^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_1 P_n$$

Para el caso en que la distribución del daño total sea la función de Poisson generalizada, es decir, cuando P_n sigue el modelo de Poisson de parámetro t , dicho valor probable será:

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_1 \frac{e^{-t} t^n}{n!} = t c_1 e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = t c_1$$

que también resulta ser el valor probable de la distribución del daño total para el caso de Polya, es decir, cuando P_n sigue una ley binomial negativa. Si $V(x)$ está normalizada, dicho valor probable será: $E(X) = t$.

Varianza de la distribución del daño total

Siendo c_2 el momento de orden dos con relación al origen de la distribución $V(x)$,

$$c_2 = \int_0^{\infty} x^2 dV(x)$$

el momento de orden dos con relación al origen de su convolución n -ésima, $V^{n*}(x)$, será:

$$\int_0^{\infty} x^2 dV^{n*}(x) = n c_2 + n(n-1) c_1^2$$

con lo que el momento de orden dos con relación al origen de la distribución del daño total, $F(x,t)$, será:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 dF(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \int_0^{\infty} x^2 dV^{n*}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \{n c_2 + n(n-1) c_1^2\} \end{aligned}$$

En el caso de que $P_n(t)$ siga la distribución de Poisson de parámetro t , tendremos:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} t^n}{n!} \{n c_2 + n(n-1) c_1^2\} = e^{-t} \left\{ t c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \right. \\ &+ t^2 c_1^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \left. \right\} = t c_2 + t^2 c_1^2 \end{aligned}$$

La varianza de X será entonces:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = t c_2 + t^2 c_1^2 - t^2 c_1^2 = t c_2$$

La desviación típica de dicha distribución será pues: $D(X) = \sqrt{t c_2}$, resultando ser el momento de orden tres con relación a la media:

$$\mu_3 = t c_3.$$

En el caso de Polya, es decir, cuando

$$P_n(t) = \binom{-k}{n} \left(-\frac{t}{t+k} \right)^n \left(\frac{k}{t+k} \right)^k,$$

la varianza resulta ser:

$$V(X) = c_2 t + \frac{(t c_1)^2}{k}, \text{ siendo el momento de orden tres con}$$

relación a la media, t :

$$\mu_3 = \int_0^{\infty} (x-t c_1)^3 d F(x,t) = c_3 t + 3 \frac{c_1 c_2 t^2}{k} + 2 \frac{(t c_1)^2}{k^2}$$

Obsérvese que la varianza, así como el momento de orden tres con relación a la media, de $F(x,t)$, para el caso de Polya, converge en la que corresponde a la de la distribución de Poisson cuando $k \rightarrow \infty$, caso, como se sabe, de ausencia de contagio, como se tuvo ocasión de analizar en el apartado correspondiente.

Función característica de la distribución del daño total

Representemos por $\phi(\theta)$ a la función característica de la distribución del daño total, $F(x,t)$, es decir,

$$\phi(\theta) = E(e^{i\theta X}) = \int_0^{\infty} e^{i\theta x} d F(x,t)$$

Sea $\psi(\theta)$ la función característica de la distribución $V(x)$ de la cuantía de un siniestro, es decir,

$$\psi(\theta) = \int_0^{\infty} e^{i\theta x} d V(x)$$

Dado que la función característica de una suma de variantes estocásticamente independientes entre sí es el producto de las funciones características de las variantes sumandos, la función característica de la convolución n -ésima $V^{n*}(x)$ de $V(x)$ será la potencia n -ésima de la función característica de ésta, es decir, $\psi^n(\theta)$. La función característica de la distribución del daño total será entonces:

$$\Psi(\theta) = \int_0^{\infty} e^{i\theta x} d F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \int_0^{\infty} e^{i\theta x} d V^{n*}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \psi^n(\theta).$$

Para el caso de la función de Poisson generalizada, es decir, cuando la distribución $P_n(t)$ es de Poisson de parámetro t , tendremos:

$$\phi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} t^n}{n!} \psi^n(\theta) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\psi(\theta))^n}{n!} = e^{-t} e^{t\psi(\theta)} = e^{t(\psi(\theta)-1)}$$

siendo para el caso en que $P_n(t)$ sea binomial negativa:

$$\phi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} \left(-\frac{t}{t+k}\right)^n \left(\frac{k}{t+k}\right)^k \psi^n(\theta) = \{1 - (\psi(\theta)-1)\}^{-k}$$

que, evidentemente, tiende a la anterior expresión cuando $k \rightarrow \infty$,

motivando los mismos comentarios anteriormente establecidos sobre la existencia o ausencia de contagio en el acaecimiento de los siniestros.

FUNCION DE POISSON GENERALIZADA PARA CASOS CONCRETOS DE $V(x)$

Vamos a obtener la función de Poisson generalizada para dos casos concretos de la distribución de la cuantía de un siniestro, $V(x)$, cuales son los casos de una distribución exponencial y de una distribución gamma.

Distribución exponencial

Sea la distribución de la cuantía del daño de un siniestro $V(x)$, exponencial, es decir, verificandose:

$$V(x) = 1 - e^{-ax} \quad \text{para } x \geq 0$$

En este caso, es fácil ver, mediante sencillos cálculos, que la función de Poisson generalizada, $F(x)$, es:

$$F(x) = e^{-n} + \int_0^{ax} g(y) dy \quad \text{para } x \geq 0$$

siendo $g(y)$ la función:

$$g(y) = n e^{-(n+y)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ny)^k}{k!(k+1)!}$$

y siendo n el número probable de siniestros.

Si $\sqrt{n y}$ es muy pequeño, la serie converge rápidamente, por lo que el cálculo directo resulta sencillo. Ahora bien, si $\sqrt{n y}$ es grande, dicho cálculo directo se convierte en laborioso y complicado. Afortunadamente, mediante las propiedades asintóticas de las funciones de Bessel, se puede establecer el siguiente desarrollo:

$$g(y) = \frac{e^{-(\sqrt{y} - \sqrt{n})^2}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{n y}} \left\{ 1 - \frac{3}{16} (\sqrt{n y})^{-1} - \frac{15}{512} (\sqrt{n y})^{-2} - \right. \\ \left. - \frac{105}{8192} (\sqrt{n y})^{-3} - \frac{4725}{524288} (\sqrt{n y})^{-4} - \frac{72765}{8388608} (\sqrt{n y})^{-5} \right\} + \text{Resto}$$

Si a la serie expresada entre corchetes la representamos por $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (\sqrt{n} y)^{-k}$, entonces los coeficientes A_k se obtienen mediante la relación de recurrencia: $A_k = \frac{(2k-1)^2 - 4}{16k} A_{k-1} \quad (k \geq 0)$

A partir de este desarrollo, $g(y)$ se obtiene con una exactitud de ocho dígitos para $\sqrt{n} y = 10$, y, con mayor precisión, para valores superiores. Incluso si el valor de $\sqrt{n} y$ es tan pequeño como 3, la expresión da correctamente los cinco primeros dígitos, con tal de incluir dos términos más del desarrollo. Para valores de $\sqrt{n} y$ menores que 3, la fórmula aporta valores deficientes, lo cual no invalida su importancia, dado que, para tales valores, se debe utilizar la expresión general.

Distribución gamma

Si la distribución de la cuantía del daño de un siniestro es gamma, es decir, con función de densidad:

$$v(x) = V'(x) = \frac{a^{b+1}}{\Gamma(b+1)} x^b e^{-ax} \quad \text{para } x \geq 0 \text{ y } b > -1.$$

la función de Poisson generalizada tendrá la misma expresión que en el caso anterior,

$$F(x) = e^{-n} + \int_0^x g(y) dy \quad \text{para } x \geq 0$$

pero siendo en este caso la función $g(y)$ la siguiente:

$$g(y) = n y^b e^{-(n+y)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n y^{b+1})^k}{\Gamma\{(k+1)(b+1)\}(k-1)!}$$

El parámetro n , como se dijo anteriormente, expresa el número probable de siniestros.

APROXIMACIONES A LA DISTRIBUCION DEL DAÑO TOTAL

El tema de la obtención de aproximaciones a la distribución del daño total $F(x,t)$ es uno de los más importantes en la teoría del riesgo colectivo, por el trascendental papel que en ésta jue-

ga dicha distribución, y ha sido, en consecuencia, de los que más aportaciones ha recogido por parte de los investigadores en dicha teoría. Ya Filip Lundberg investigó en 1903 sobre él, obteniendo la aproximación normal a $F(x,t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, así como otro tipo de aproximaciones cuando t no tiende a infinito. Posteriormente, numerosos autores, como Cramér, Esscher, Persson, etc., han seguido investigando en el tema según la pauta marcada por el creador de la teoría del riesgo colectivo.

Como indican con acierto Beard, Pentikainen y Pesonen, en la reiteradamente mencionada obra "Risk Theory", "la función de Poisson generalizada, $F(x)$, es, desafortunadamente, complicada a efectos de cálculo, particularmente en las aplicaciones prácticas. Los métodos directos para atacar el problema del tratamiento numérico de $F(x)$ conducen con frecuencia a engorrosas expresiones por lo que, en general, no resulta sencillo abordar, a través de ellos, los problemas relativos, por ejemplo, a los diferentes métodos de reaseguro, retenciones netas y recargos de seguridad. Aún diríamos más, es extremadamente difícil obtener un claro análisis de los problemas. Incluso si la naturaleza de los mismos precisa de los cálculos más detallados, son necesarias aproximaciones simples con las que trabajar, por lo que inferimos que uno de los problemas más importantes de aplicación de la teoría del riesgo es la búsqueda de las aproximaciones más adecuadas".

Por todas las razones expuestas, juzgamos de interés entrar en el tema del análisis de las aproximaciones a la distribución del daño total, dado que, además, será ésta el elemento fundamental en la definición de las tarificaciones de los distintos riesgos. Si nuestra pretensión es, entonces, clara, no lo es tanto la forma en que debemos plantear el tema. El problema al que aludimos es al de la ordenación de los varios métodos de aproximación que hagan nuestra exposición eficaz. Porque, en definitiva, cuando son múltiples los métodos de aproximación, el problema no es sólo establecerlos sino cómo estructurarlos, dado que el investigador práctico habrá de elegir entre ellos, y ese problema de decisión se simplifica o, al menos, se racionaliza si los distintos métodos se encuentran clasificados por categorías racionales. En este sentido, pensamos que es oportuno seguir

la pauta marcada en uno de los trabajos fundamentales sobre la materia, el trabajo que, con sus aportaciones estadísticas, ha sido fuente de información de todos los demás que se han ido elaborando. Nos referimos al fundamental artículo de Harald Bohman y Frederik Esscher titulado "Studies in Risk Theory with Numerical Illustrations Concerning Distribution Functions and stop Loss Premiums". (1). Este trabajo, como indican sus autores, es el resultado de las investigaciones llevadas a cabo por un grupo de actuarios en Suecia en 1961. Como expresan Bohman y Esscher, a la luz del desarrollo de la técnica de los ordenadores en la década de los años 50, se formó en Suecia un comité en 1961, con la finalidad de encontrar aplicaciones de esa técnica a la teoría del riesgo, en sus distintas facetas. Tal comité estaba integrado por Benktander, Bohman, Cramér, Esscher, Grenander, Philipson y Segerdahl. El objetivo primordial de las investigaciones de dicho comité fue el análisis de dos funciones fundamentales en la teoría del riesgo colectivo, cuales son la distribución de la cuantía del daño total, F , y la prima de reaseguro Stop Loss, Π , analizando ambas distribuciones, y, en nuestro caso, la que nos interesa, F , para distintos modelos sobre la cuantía del daño de un siniestro, V , y distintas estadísticas, que abarcaban al seguro de vida, seguro de incendios (industriales y no industriales), seguro del automóvil, etc.

Una de las aportaciones del trabajo de dicho comité, la que a nuestros efectos interesa ahora, fue el establecimiento de una clasificación de los métodos aproximativos investigados. Los métodos utilizados en los cálculos numéricos realizados, los clasifican sus autores, a efectos de simplicidad, en dos grandes apartados:

(1) Bohamn, Harald- Esscher, Frederik: Studies in Risk Theory with Numerical Illustrations Concerning Distribution Functions and Stop Loss Premiums. Part. I: Skand Aktuar. 1963, Haft 3-4. Pag. 173-225. Part. II (Tablas). Skand Aktuar. 1964, Häft 1-2. Pag. 1-40

a/ Los "Machine oriented methods", a los que podríamos expresar por "métodos programables", por cuanto sus autores los definen como "métodos en los cuales el trabajo numérico es tan extenso que no pueden ser desarrollados sin el uso de ordenadores electrónicos".

b/ "Métodos abreviados" o "simplificados" ("short cut methods"), a los que definen como aquellos métodos que, mediante el uso de especiales propiedades de las funciones a calcular, dan resultados aproximados de las mismas sin excesivos cálculos numéricos".

Entre los métodos simplificados, destacan la aproximación normal, la de Esscher y la de la función gamma.

Esta clasificación de las aproximaciones a la distribución del daño total es, obviamente, incompleta, y quizá excesivamente simplificativa. Por ejemplo, no recoge en su seno a una de las más recientes modelizaciones, y de las más vigentes en los momentos actuales, el método NP (Normal Power). Tampoco incluye el método Monte Carlo aplicado al análisis de $F(x,t)$, etc. En el caso del método NP, sin embargo, no había problema alguno dado que, al tratarse de una extensión de la aproximación normal (consideración de mayor número de términos en el desarrollo de Edgewort correspondiente), antraría claramente dentro de la categoría de los métodos abreviados.

Sin embargo, si bien es cierto que, posiblemente, la clasificación propuesta por Bohman y Esscher no es óptima, si juzgamos que es un punto de referencia válido en nuestro trabajo. Enfocaremos, por tanto, nuestro análisis de las aproximaciones a la distribución del daño total comenzando con los llamados métodos abreviados, por ser los más importantes en los momentos actuales, y lo concluiremos con una breve referencia a los métodos programables que, con la experiencia disponible de tres lustros, no se han revelado tan eficaces como los anteriores. Y entre los métodos abreviados, es obligado referirse, en primer lugar, a la aproximación normal, por dos razones fundamentales: a/ Por ser la primera desde el punto de vista histórico; b/ Por ser, pensamos, la de mayor contenido estadístico, es decir, la que corres-

ponde a la aplicación de uno de los pilares fundamentales de la Estadística a lo largo de la historia de esta ciencia: el teorema central del límite. Las otras aproximaciones, en mayor o menor medida, participan de cierto grado de artificiosidad, lo que no debe traducirse, por supuesto, por falta de rigor.

Comencemos, por tanto, por el análisis de la aproximación normal a la distribución del daño total.

APROXIMACION NORMAL

La aproximación más clásica a la distribución del daño total, $F(x,t)$, es la aproximación normal formulada por Lundberg en 1.903. La aproximación normal a $F(x,t)$ no es más que el resultado de la aplicación del teorema central del límite a $F(x,t)$. En efecto, dado que $F(x,t)$ es la función de distribución de una variante $X = \sum_{i=1}^t x_i$ suma de t variantes x_i igualmente distribuidas y estocásticamente independientes entre sí, el teorema central del límite nos permite afirmar que, sea cual sea la forma de $F(x,t)$, dicha función es asintóticamente normal cuando $t \rightarrow \infty$, lo que nos permite obtener la siguiente expresión aproximada:

$$F(x,t) \approx \phi\left(\frac{x-E_X}{\sigma_X}\right)$$

donde E_X y σ_X son, respectivamente, el valor probable y la desviación típica de $F(x,t)$ y $\phi(x)$ es la función de distribución de la distribución $N(0,1)$.

En el caso de que $F(x,t)$ sea la función de Poisson generalizada, $E_X = tc_1$ y $\sigma_X = \sqrt{tc_2}$, según tuvimos ocasión de ver, mientras que en el caso de Polya, es decir, si la distribución del número de siniestros es binomial negativa, $E_X = tc_1$ y $\sigma_X = \sqrt{tc_2 + (tc_1)^2/k}$. C_r , como se sabe, es el momento de orden r con relación al origen de $V(x)$.

La aproximación normal no es más que un caso particular del desarrollo de Edgeworth que, en nuestro caso, conduce a la aproximación:

$$F(x,t) = \phi(z) - \frac{c_3}{6\sqrt{tc_2^3}} \phi^{(3)}(z) + \frac{c_4}{24tc_2^2} \phi^{(4)}(z) + \frac{c_3^2}{72tc_2^3} \phi^{(6)}(z) + O(t^{-3/2})$$

siendo $z = (x - tc_1) / \sqrt{tc_2}$

La demostración del desarrollo de Edgeworth se encuentra perfectamente expresada, por ejemplo, en el Apéndice B (pag. 176 y 177) de la mencionada obra "Risk Theory".

A la luz de este desarrollo, se aprecia claramente que la aproximación normal no es más que el desarrollo de Edgeworth de la función $F(x,t)$, en el que únicamente se considera el primer término, es decir, prescindiendo de los términos que verifican $O(1/\sqrt{t})$. El problema del desarrollo de Edgeworth es que, según Beard ("Risk Theory"), "se puede evidenciar que el error relativo del desarrollo de Edgeworth tiende a infinito conforme $x \rightarrow \infty$. Dicho desarrollo no es convergente, bien al contrario, se trata de una serie divergente, lo que imposibilita que, mediante el simple incremento del número de términos considerados, se obtenga una aproximación tan ajustada como se desee, para un valor dado de t . De todas formas, tomando un adecuado número de términos, tal desarrollo produce una aceptable aproximación en el entorno del valor medio. Se puede esperar que, generalmente, el resultado será bueno hasta una distancia a la media de dos veces la desviación típica, si bien para puntos exteriores a dicho intervalo, la bondad de los resultados obtenidos decrece muy rápidamente. Desde el punto de vista de la teoría del riesgo, este hecho es desafortunadamente importante, por cuanto, en la mayoría de los problemas planteados, el principal interés versa sobre los puntos que, situados a la derecha de la media, se distancian de ella dos o tres veces la desviación típica. Por esta razón, es preciso contar con alguno desarrollo mejor que el de Edgeworth".

Se impone, por tanto la búsqueda de nuevos métodos de aproximación a $F(x,t)$. Y, entre ellos, consideremos el más reciente, que en los momentos actuales, se ha convertido en uno de los más importantes, el método NP.

METODO NP (NORMAL POWER)

El método NP es un método basado en la inversión del desarrollo de Edgerworth, según la idea debida originalmente a Fisher y Cornish. Consiste en lo siguiente: Dada la variante ξ distribuida como una $N(0,1)$, y siendo la variante del daño total distribuida, en la aproximación normal a la función de Poisson generalizada, como una variante normal $tc_1 + \sqrt{tc_2}$, se establece el cambio de variable $\eta = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots$ y se determinan los coeficientes a_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, del cambio por medio de un desarrollo de Edgerworth. De esta forma, si la variante ξ de la aproximación normal a $F(x, t)$ tiene por función de distribución:

$$\phi(y) = P(\xi \leq y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 z^2} dz$$

la nueva variante η tendrá por función de distribución:

$$P(\eta \leq y + \Delta y) = \phi(y + \Delta y) - \frac{1}{6} \gamma_1 \phi^{(3)}(y + \Delta y) + \frac{1}{24} \gamma_2 \phi^{(4)}(y + \Delta y) + \frac{1}{72} \gamma_1^2 \phi^{(6)}(y + \Delta y) + O(t^{-3/2})$$

donde $\gamma_1 = c_3 |t|^{1/2} c_2^{3/2}$ y $\gamma_2 = c_4 |tc_2^2$, siendo

$c_r = \int_0^\infty x^r dV(x)$ y $\phi(y)$, como hemos indicado, es la función de distribución $N(0,1)$, y verificándose: $y + \Delta y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$

Pues bien, determinando Δy , resulta la expresión:

$$\frac{x - tc_1}{\sqrt{tc_2}} = y + \Delta y = y + \frac{1}{6} \gamma_1 (y^2 - 1) + \frac{1}{24} \gamma_2 (y^3 - 3y) - \frac{1}{36} \gamma_1^2 (2y^3 - 5y) + O(t^{-3/2})$$

Resulta entonces evidente que la aproximación normal es un caso particular de este desarrollo, el caso en que nos quedamos con el primer término del mismo.

El método NP o "Normal Power" de aproximación a la distribución de Poisson no elemental $F(x, t) = \sum e^{-t} t^k V^{k*}(x) / k!$; define a dicha función como la solución del siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$F(x,t) = \phi(y)$$

$$\frac{x-tc_1}{\sqrt{tc_2}} = y + \frac{1}{\sqrt{tc_2}} \frac{c_3}{3}(y^2-1) + \frac{1}{24} \frac{c_4}{tc_2^3}(y^3-3y) - \frac{1}{36} \frac{c_3^2}{tc_2^3}(2y^3-5y)$$

La segunda ecuación del sistema nos da los primeros términos de una serie divergente. Si se fija la función $V(x)$ de distribución de la cunatía de un siniestro y t se incrementa, los términos omitidos del desarrollo, siendo del orden de $t^{-3/2}$ al menos, tienden más rápidamente a 0 que los términos dados explícitamente del mismo, que son del orden t^0 , $t^{-1/2}$ y t^{-1} . El siguiente término, de orden $t^{-3/2}$, sería:

$$R = \frac{1}{120} \frac{c_5}{c_2^{5/2} t^{3/2}} (y^4 - 6y^2 + 3) - \frac{1}{24} \frac{c_3 c_4}{t^{3/2} c_2^{7/2}} (y^4 - 5y^2 + 2) + \frac{1}{324} \frac{c_3^3}{t^{3/2} c_2^{9/2}} (12y^4 - 53y^2 + 17)$$

Como es frecuente en esta clase de series, el error parece ser del mismo orden que el primer término omitido en el desarrollo. Dado que en la expresión del error aproximado, R , aparece c_5 , Pesonen (1) ha desarrollado un método que permite acotar la magnitud del error cometido prescindiendo de dicho momento.

En realidad no se debe hablar, estrictamente, de un método NP sino de varios métodos NP. Berger (2) representa por NP_k a la aproximación "Normal Power" en la que se utilizan los k primeros términos de la segunda función característica del método, segunda ecuación del sistema que lo define. De esta forma, NP_1 corresponde obviamente a la aproximación normal. NP_2 requiere la solución de una ecuación cuadrática y NP_3 la resolución de una ecuación cúbica.

(1) Pesonen, Erkki: NP-approximation of Risk Processes. Skand. Aktuar. 1968.

Nº3-4. Pag. 158-164. 1969. Nº3-4. Supplement. Pag. 63-69

(2) Berger, Gottfried: Integration of the Normal Power. approximation. The Astin Bulletin. Vol. VII, Part. 1. Diciembre 1962. Pag. 90-

Por tanto, para establecer la aproximación NP_2 , es preciso resolver en y la ecuación cuadrática.

$$\frac{x - tc_1}{\sqrt{tc_2}} = y + \frac{1}{\sqrt{tc_2}} \frac{c_3}{3} (y^2 - 1)$$

resolución que conduce a la siguiente fórmula aproximada:

$$F(x, t) \approx \phi \left(\sqrt{\frac{9tc_2^3}{c_3^2} + 1} + \frac{6(x - tc_1)c_2}{c_3} - \frac{\sqrt{3} tc_2^3}{c_3} \right)$$

siendo, insistimos, ϕ la función de distribución $N(0,1)$.

La expresión explícita de la aproximación NP_3 a la función de Poisson generalizada $F(x, t)$ será, obviamente, mucho más complicada, al requerir la resolución en y' de la ecuación cúbica que, como segunda ecuación, integraba el sistema que formulamos anteriormente. Los métodos aproximados de resolución de ecuaciones cúbicas que aporta el Análisis Numérico serán de utilización fundamental en este método NP_3 .

Génesis del método NP y trabajos sobre el mismo

La primera referencia al método NP en la literatura científica, aunque no la mencionara explícitamente, al menos por el nombre con el que se ha consagrado, la encontramos en el trabajo de Lauri Kauppi y Pertti Ojantakanen (1), que, aunque publicado en el Astin Bulletin en 1969 (con posterioridad, por tanto, al trabajo de Pesonen) fue presentado al colegio Astin celebrado en Arnhem en 1966. Se trata, por tanto, del más reciente método de aproximación a la distribución del daño total, $F(x, t)$. En tan corto periodo de vida, el método NP se ha revelado fecundo en sus aplicaciones, como tendremos ocasión de ver.

Kauppi y Ojantakanen procedieron a comparar, en el trabajo que hemos reseñado, las aproximaciones normal, de Esscher, y la del método de Monte Carlo, en base a las estadísticas de sinies-

(1) Kauppi, Lauri- Ojantakanen, Pertti: Approximations of the Generalised Poisson Function. The Astin Bulletin. Vol. V, Part. II. Mayo, 1969. Pag. 213-226

tros. correspondientes al seguro de incendios industriales, por una parte, y de automóviles por otra, correspondientes a Finlandia. Resultado de dicha comparación fue el contrastar la necesidad de un nuevo método, al que no dieron nombre, pero que sería el método que denominamos NP_2 . Procedieron, así mismo, a un somero análisis del error cometido en dicho análisis a través del resto de la serie. Este trabajo ha sido, propiamente, el que ha introducido el método NP dentro de las técnicas actuariales de aproximación a $F(x,t)$. Pero, como contrasta Seal en un trabajo que posteriormente comentaremos, no procedieron al cálculo de valores de $F(x,t)$ a través de dicho método, sino que se limitaron a formularlo.

Quien primeramente procedió al cálculo de valores de $F(x,t)$ por medio del método NP y a través de ordenadores, y los comparó con los "verdaderos" valores de dicha función fue Erkki Pesonen, en su trabajo "NP approximation of Risk Processes", trabajo capital en la historia de este nuevo método, y que hemos reseñado anteriormente. Pesonen procedió, en base a las estadísticas aportadas por Bohman y Esscher en un trabajo que ya hemos mencionado, a analizar la bondad del modelo NP, en comparación con el de Esscher y el del desarrollo de Edgeworth, análisis que resumiremos una vez que se haya definido el método de Esscher. Procedió, así mismo, a la determinación de primas en el reaseguro Stop Loss por medio del método NP y analizó la que, en opinión del autor del trabajo, es la más importante aplicación del método, cual es la determinación de x para un valor dado de $1-F(x)$ (concebido como probabilidad de ruina). Según Pesonen, dado un valor cualquiera de $1-F(x)$, el correspondiente valor de y se obtiene sin dificultad a través de la primera ecuación del método, por medio de tablas, y, a partir de ese valor de y , el correspondiente de x , mediante la segunda ecuación característica del método.

El tercer hito en la historia del establecimiento del método NP se suele considerar que es el trabajo de Gottfried Berger titulado "Integration of the Normal Power approximation", que reseñamos anteriormente. En este trabajo, Berger procede a definir el método NP siguiendo la pauta de los anteriores trabajos, pero con

la aportación de establecer distintos métodos NP, según el orden del desarrollo en serie utilizado. Fundamentalmente, a partir precisamente del trabajo de Bergen, se habla de dos métodos NP básicos: el NP_2 y el NP_3 . Bergen los ha programado, y es interesante su exposición sobre los tiempos CPU precisos para su cálculo en un ordenador IBM 370. Aplica las aproximaciones NP, en primer lugar, al seguro de vida, según una distribución utilizada por Ammeter, valores que recoge en la tabla 1 de su trabajo. Como índice Berger, al analizar los tiempos de resolución del programa, "la aproximación NP resulta económica sólo si el número esperado de siniestros t , es, como mínimo, 10". Así mismo, hace uso de la distribución de incendios no industriales recogida en el trabajo de Bohman y Esscher, y que incluye en la tabla 2 de su trabajo. A partir de la comparación de los valores recogidos en ambas tablas, obtiene las siguientes conclusiones fundamentales:

- "a/ La integración no parece agrandar el error residual. De esta forma, la técnica NP puede ser aplicada para la estimación de primas elevadas en el reaseguro Stop Loss.
- b/ NP_2 produce adecuados resultados si $\gamma_1 \leq 2$. Esto se corresponde con la experiencia existente al respecto.
- c/ NP_3 no produce generalmente mejores resultados que NP_2 . Resulta entonces claro que NP_3 es preferible sólo para pequeños valores de x (digamos $x \leq E + 2\sigma$).

En los tres trabajos que sintéticamente acabamos de comentar se estructura el método NP. Los demás trabajos que se podrían reseñar sólo aportan matices al método, ya perfectamente estructurado. Entre los trabajos de aplicación del método NP a ámbitos distintos a los considerados, estimamos conveniente referirnos al de Erkki Pesonen, titulado "NP-Technique as Tool in Decisión Making" (The Astin Bulletin. Vol. VIII, Part. 3. Septiembre, 1975 Pag. 359-363). En él, Pesonen ha demostrado cómo la técnica NP se revela especialmente útil para el cálculo de las integrales que surgen en la determinación de las utilizadas para la toma de decisiones. El autor parte de la importancia del concepto de utilidad en el proceso de toma de decisiones, según ha sido puesto de manifiesto por Karl Borch en su importante trabajo "The Utility

Concept Applied to the Theory of Insurance" (The Astin Bulletin Vol. I, Part. V. Julio, 1961. Pag. 241-256). Así Pesonen afirma que "es probable que en las futuras aplicaciones de los métodos actuariales a la toma de decisiones en las entidades no-vida se hará una progresiva apelación al concepto de utilidad. En este sentido, será importante disponer de métodos numéricos manejable El cálculo de la función de distribución del beneficio es un inevitable problema desde un punto de vista práctico. Incluso cuando sea posible calcular dicha función con adecuada fiabilidad que los ordenadores nos permiten hoy en día, las integrales se hacen extremadamente laboriosas cuando se aplican al proceso de toma de decisiones basadas en el concepto de utilidad". Por ello, Pesonen analiza y muestra cómo el método NP es particularmente adecuado en la determinación de las integrales precisas para el cálculo de las utilidades. Consideramos que es éste uno de los temas donde se debe investigar con profundidad, en la línea de las aportaciones de Pesonen.

Bondad del método NP

Como dice Beard en "Risk Theory", dado que la prueba del método NP se basa en la hipótesis de que $F(x)$ puede ser representado por un número finito de términos principales de un desarrollo de Edgeworth, no resulta lógico esperar un resultado mejor para la aproximación NP que el obtenido por el uso directo de dichos desarrollos. Este argumento, sin embargo, se ha mostrado erróneo lo cual es un hecho bastante sorprendente. La experiencia de la aplicación del método NP por varios autores fineses (Kauppi y Ojantakanen, 1966) muestra que casi siempre (con más precisión si γ_1 no es muy grande, digamos más de 2) da muy aceptables resultados, mientras que el desarrollo de Edgeworth es normalmente insatisfactorio para los puntos que se desvían en alguna medida del valor medio".

Podemos decir, en principio, con independencia de los análisis comparativos entre el método NP, método de la función gamma y método de Esscher que se establecerán una vez que se hayan desarrollado estos dos últimos métodos, que el método NP ha tenido un gran acogida en el ámbito científico-actuarial, y se ha convert

en uno de los métodos más utilizados por quienes se dedican a estas cuestiones, en línea con la opinión de Beard anteriormente extractada. Así, Pesonen, en "NP-approximation of Risk Processes" afirma que "se trata de un buen método" y Hans Buhlmann, en su comentario al libro de Beekman "Review of J.A. Beekman's "Two Stochastic Processes"" (The Astin Bulletin. Vol. VIII, Part. I. Septiembre, 1974. Pag. 131-132), llega, diríamos, al entusiasmo con el método NP, al afirmar "todo a quien conozco que haya trabajado con él ha quedado sorprendido por su inesperada buena precisión". Unicamente Hilary L. Seal, en "Approximations to Risk Theory's $F(x,t)$ by Means of the Gamma Distribution", trabajo que posteriormente analizaremos, muestra serios reparos al método, al afirmar que "la llamada aproximación NP (Normal Power) ha adquirido una innmerceda fama de exactitud entre los distintos métodos de aproximación, y nuestra opinión es que debería ser abandonada en favor de una aproximación a través de la función gamma simple". La comparación entre ambos métodos de aproximación la efectuaremos una vez que hayamos definido éste último de la función gamma. Diremos únicamente que el trabajo de Seal ha provocado una intensa polémica, de la que nos haremos eco, en la que recientemente ha intervenido Pentikainen para refutar las tesis de Seal y reafirmar la valoración positiva que el método NP ha merecido a la inmensa mayoría de autores que han tratado el problema de las aproximaciones a la distribución del daño total.

METODO G O DE LA DISTRIBUCION GAMMA

De entre los métodos abreviados (Short cut methods) de aproximación a $F(x,t)$ propuestos por Bohman y Esscher en su trabajo "Studies in Risk Theory with Numerical Illustrations Concerning Distribution Functions and Stop Loss Premiums", al que reiteradamente nos hemos referido, vamos a analizar las aproximaciones normales que, en el caso de Polya, conducen al método G o de la distribución gamma.

Las aproximaciones normales se basan en los desarrollos de Grau-Charlier, que son de la forma:

$$f(x) = \alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \dots = f_0 \sum \alpha_i H_i(x)$$

donde $H_i(x)$ son los polinomios de Hermite que resultan del siguiente proceso de derivación a partir de la función de densidad normal:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$f'_0(x) = f_2(x) = f_1(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = -x f_0(x) = H_1(x) f_0(x)$$

$$f''_0(x) = f_4(x) = (x^2 - 1) f_0(x) = H_2(x) f_0(x)$$

$$f'''_0(x) = f_6(x) = -(x^3 - 3x) f_0(x) = H_3(x) f_0(x)$$

.....

Como expresa Sixto Rios en su obra "Métodos Estadísticos" se puede probar que, bajo ciertas condiciones, una función de densidad con media cero y desviación típica 1 se puede expresar en una serie del tipo $f(x) = \sum \alpha_i f_i(x) = f_0 \sum \alpha_i H_i(x)$, en que los coeficientes α_i se calculan por las relaciones:

$$\alpha_k = \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) f(x) dx$$

Pues bien, partiendo del desarrollo de Gram-Charlier de

$$F_0(z, t) = F(t + z\sqrt{\mu_2}, t)$$

donde μ_2 es la varianza de $F(x, t)$, su derivada será

$$f_0(z, t) = F'_0(z, t) = \sum \frac{\beta_r}{r!} \phi^{(r)}(z)$$

$$\text{siendo } \phi(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}, \quad \phi^{(r)}(z) = \frac{d^r \phi(z)}{dz^r} \quad y$$

$$\beta_r = (-1)^r \int_{-\infty}^{\infty} H_r(z) f_0(z, t) dz,$$

en donde $H_r(z)$ son los polinomios de Hermite asociados a la distribución normal. De esta forma, se obtendrán las siguientes aproximaciones:

$$f_0(z, t) \approx \phi(z)$$

$$f_0(z, t) \approx \phi(z) - \frac{\mu_3}{3! \mu_2^{3/2}} \phi'''(z)$$

$$f_0(z, t) \approx \phi(z) - \frac{\mu_3}{3! \mu_2^{3/2}} \phi^{(3)}(z) + \frac{1}{4!} \left(\frac{\mu_4}{\mu_2^{1/2}} - 3 \right) \phi^{(4)}(z) + \frac{10}{6!} \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \phi^{(6)}(z)$$

siendo μ_k los momentos centrales de $F(x,t)$. Cramér, en su obra "Collective Risk Theory", expresa estos desarrollos en potencias de $t^{-1/2}$.

Bohman y Esscher diferencian los casos de Poisson (función de Poisson generalizada) y de Polya ($P_n(t)$ sigue una ley binomial negativa) a efectos de analizar la validez de las aproximaciones normales y llegan a la conclusión de que tales expresiones asintóticas son válidas si $t \rightarrow \infty$, en el caso de Poisson y si, siendo $t \rightarrow \infty$ y $k \rightarrow \infty$, t/k es constante, en el caso de Polya. La aproximación normal para el caso de Poisson ya fue obtenida por Esscher en 1932, y se puede demostrar que se desprende, así mismo, del desarrollo de Cramér. El caso de Polya fue demostrado por Ammeter en 1948.

O. Lundberg demostró en 1940 que si $t \rightarrow \infty$ y k permanece constante, se sigue generalmente que

$$F(st,t) \rightarrow U(s)$$

supuesto que $c_1 = 1$. En el caso de Polya, esto significa que, cuando $t \rightarrow \infty$ y $k = \text{constante}$,

$$F(st,t) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{ks} e^{-y} y^{k-1} dy$$

a partir de cuya expresión se obtiene que:

$$F_0(z,t) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{(z+\sqrt{k})\sqrt{k}} e^{-y} y^{k-1} dy = G_0(z,k)$$

Se puede demostrar que, en este caso, existe un desarrollo de la función según potencias de t^{-1} . $G_0(z,k)$ es una función de distribución, con media 0 y varianza 1, para todo valor de k . Si ponemos:

$$G_0(z,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(z+\sqrt{\alpha})\sqrt{\alpha}} e^{-y} y^{\alpha-1} dy$$

siempre es posible determinar α de tal forma que los tres primeros momentos de $G_0(z,\alpha)$ coincidan con los de $F_0(z,t)$. Se demuestra fácilmente que para ello ha de ser $\alpha = 4/\gamma_3^2$. Además, se verifica que $\alpha \rightarrow k$ cuando $t \rightarrow \infty$. Todo ello conduce a que se produzca la aproximación de $F_0(z,t)$ a través de $G_0(z,\alpha)$, es decir, a poner incluso $F_0(z,t) = G_0(z,\alpha)$ con $\alpha = 4/\gamma_3^2$.

A este método de aproximación lo denominan Bohman y Esscher Método G. En definitiva, el método G consiste en establecer la aproximación

$$F(t+z\sqrt{\mu_2}, t) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t+z\sqrt{\alpha}} e^{-y} y^{\alpha-1} dy = P(\alpha, t+z\sqrt{\alpha})$$

donde P es la función gamma incompleta y se determina a partir de

$$\alpha = \frac{4}{\gamma_3^2}$$

Philipson ha generalizado este tratamiento en su trabajo "On Esscher Transforms of Distribution Functions Defining a Compound Poisson Process for Large Values of the Parameter" (Skand Aktuar. 1963. Häft 3-4. Pag. 226-236).

Bondad del Método G y comparación del mismo con el Método NP

Bohman y Esscher han expresado en su trabajo que "el método G tiene una sorprendente precisión en grandes partes del campo investigado", pese a lo cual se puede afirmar que no ha sido utilizado en absoluto hasta que lo ha reivindicado, con cierto apasionamiento, Hilary L. Seal (1), en un trabajo sumamente polémico en contra de la aproximación NP y a favor del método G. Seal afirma que, dada la bondad del método G, puesta de manifiesto por los trabajos de Bohman y Esscher, "uno se pregunta por qué razón no ha sido utilizado más frecuentemente. Además, dado que la función gamma incompleta está tabulada, el método se hace aún más sencillo". A efectos de utilización del método G, se puede hacer uso, por ejemplo, de las tablas de Khamis y Rudert, que reseñamos en la bibliografía de este trabajo.

Seal, en base a las estadísticas aportadas por Bohman y Esscher, ha comparado las aproximaciones NP_2 y NP_3 a $F(x, t)$ con

(1) Seal, Hilary L.: Approximations to Risk Theory's $F(x, t)$ by Means of the Gamma Distribution. The Astin Bulletin. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 213-218

los resultados obtenidos a partir de la distribución gamma. Ha tomado 38 valores de $1-F(x,t)$, correspondientes al seguro de incendios no industriales (32 valores) y al seguro de vida (6 valores), y el resultado ha sido que la aproximación gamma, el método G, es mejor que la NP_2 en 27 de ellos y que la NP_3 en 27 también. Y, lo que en opinión de Seal es más importante, la aproximación gamma es mejor que la NP_2 en 9 de los 12 casos en los que las desviaciones con relación a la media son 4,5 ó 6 veces la desviación típica. El correspondiente número entre la docena de similares casos en NP_3 en los que es mejor el método G, es así mismo, 9 (aunque no los mismos 9 que en NP_2). Aún más, en opinión de Seal, la superioridad de la aproximación gamma no parece depender de la cuantía de α , en la que grandes valores de la misma se supone que mejoran la exactitud o bondad del método NP. En una frase ciertamente extremista, Seal llega a afirmar que "seguramente, éste es un motivo suficiente para descartar definitivamente al método NP". Para concluir su crítica al método NP, Seal afirma que, lo mismo que el método NP, la aproximación gamma puede ser utilizada para el cálculo de las primas en un reaseguro Stop Loss.

En la sonada polémica promovida por el artículo de Seal sobre la bondad de los métodos NP y G, intervino de manera inmediata Pentikäinen (1), quién ha puesto de manifiesto que las tesis de Seal van en contra de gran cantidad de experiencias estadísticas, distintas a las utilizadas por Seal, ha comparado los valores exactos de $F(x,t)$ con los obtenidos por la aproximación NP y por la gamma. Toma datos de las distribuciones exponenciales, Vida A, Vida B e incendios no industriales del trabajo de Bohman y Esscher. Toma datos, así mismo, de entidades finas sobre distribuciones de incendios industriales (F/ Ind) y del seguro del automóvil (F/ Mo) del trabajo de Kauppi y Ojantakanen, publicado

(1) Pentikäinen, T.: On the Approximation of the Total Amount of Claims. The Astin Bulletin. Vol. IX, Part. 3. Diciembre, 1977.
Pag. 281-289

en 1.969 y anteriormente reseñado. A partir de todos estos datos, Petikainen ha procedido a calcular las desviaciones entre los valores reales de F (a los que representa por FA) y los aproximados (representados por NP para el método "Normal Power" y GA para la aproximación gamma), desviaciones que ha calculado de dos formas: Δ_1 , como desviación relativa de los respectivos valores del intervalo $FA \pm \Delta FA$, con respecto a FA. Es decir, si, por ejemplo, $|NP-FA| < \Delta FA$, la desviación es 0. La segunda desviación, Δ_2 , es la desviación relativa a partir de los valores de FA, es decir,

$$\Delta_2 NP = \frac{NP-FA}{FA} \times 100$$

A partir de los datos se obtienen unas tablas de desviaciones, que resumimos en los siguientes valores significativos:

<u>Desviación máxima en %</u>		
γ_1 = Coeficiente de simetría	<u>NP</u>	<u>GA</u>
	<u>$\Delta_1(\Delta_2)$</u>	<u>$\Delta_1(\Delta_2)$</u>
Cuando $\gamma_1 < 1$ e $y = 3$	0 (3)	3 (5)
" $\gamma_1 < 1$ y = 4	9(12)	9(11)
.....		
" $\gamma_1 < 2$ y = 3	9(25)	10(12)
" $\gamma_1 < 2$ y = 4	24(25)	12(14)
" $\gamma_1 < 2$ y = 6	41(44)	64(66)
.....		

Por otra parte, cuando $\gamma_1 > 3$ e $y = 3$ ó 4, los valores NP pueden experimentar desviaciones superiores al 100%, mientras que los valores GA se encuentran en los límites -37, 39%. Cuando $y =$ la desviación más grande en el método NP es del 54%, mientras que en el GA es del 64%. "Como conclusión- indica Pentikainen- no se aprecia una sustancial diferencia entre el método NP y el método gamma G. Por otra parte, la hipótesis de Seal, según la cual el método gamma no se ve afectado por los valores de γ_1 es claramente incorrecta. Así mismo, es evidente que si se produce un fuerte incremento en el valor de γ_1 , ninguno de los dos métodos es aceptable". Y es que, como acertadamente afirma Pentikainen, " la sor-

prendente diferencia de opinión entre Seal y nosotros puede radicar en el hecho de que Seal haya relacionado, del ingente material estadístico disponible, sólo los casos más peligrosos, donde, de hecho, nadie puede esperar adecuación de tipo alguno en las aproximaciones en cuestión. Parte de la conclusión de Seal, al menos la concerniente a la independencia del valor de γ_1 , puede también depender de un error en los valores tabulados (que aparece, así mismo, en el trabajo de Bohman y Esscher). En la realidad cotidiana, la mayoría de las entidades aseguradoras tienen concertados unos adecuados contratos de reaseguro. De esta forma, el negocio de propia retención de la compañía es razonablemente homogéneo, es decir, no "peligroso". Así, la cuantía de γ_1 debe ser tan pequeña que nos encontremos ciertamente en una área "segura". Nuestra experiencia nos indica que γ_1 es, normalmente, del orden de 0,1 ó 0,2, rara vez mayor que 0,5 si la compañía tiene concertado un reaseguro convencional. Las aproximaciones en cuestión son, de hecho, válidas para tales casos". Por último, en el trabajo que comentamos, Pentikainen ha comprobado que NP_3 no da mejores aproximaciones que NP_2 o que la aproximación gamma.

La conclusión de todo lo que se ha venido diciendo en el análisis comparativo de las aproximaciones NP y gamma es que, con mayores o menores matices, ambos métodos aproximativos vienen a aportar resultados semejantes, siendo entonces ambos de interés en el análisis numérico de la función $F(x,t)$. Analicemos a continuación otro método aproximativo que se ha hecho famoso en la investigación actuarial de $F(x,t)$, cual es el método de Esscher.

METODO DE ESSCHER

Entre los métodos abreviados descritos por Bohman y Esscher figura, en lugar destacado, el método de este último. Frederik Esscher publicó en 1.932 un trabajo clásico titulado "On the Probability Function in the Collective Theory of Risk" (Skand Aktuar 1932) en el que presentaba una aproximación a la función del daño total $F(x)$ que ha hecho fortuna. Como indican Beard, Pentikainen y Pesonen en "Risk Theory", desde que se conoce que la distribución normal no aporta una buena aproximación si la distribución básica $S(-)$ (distribución de la cuantía de un siniestro

tro) es muy heterogénea, especialmente si, al mismo tiempo, el número esperado de siniestros, \bar{n} , es pequeño, otra aproximación, encontrada por Esscher en 1932, ha sido profusamente utilizada. Desgraciadamente, la fórmula de Esscher presenta una característica negativa, cual es la dificultad de su manejo matemático, si bien, a pesar de todo, ha sido considerablemente utilizada. A pesar de que se han desarrollado nuevos métodos de aproximación, tales como la aproximación NP, el método de Monte Carlo, el método de inversión, etc., que pueden restar argumentos a la conveniencia de la fórmula de Esscher, de cualquier forma, este método es uno de los más importantes modelos disponibles para el cálculo de los valores numéricos de la función de Poisson generalizada".

Veamos en que consiste el método de Esscher, según la exposición que del mismo hacen Beard, Pentikainen y Pesonen en "Risk Theory". La fórmula de Esscher se basa en una transformación de la función de Poisson generalizada, que es la siguiente:

$$S(x) = \frac{1}{\beta_0} \int_0^x e^{hy} dS(y)$$

en donde la constante β_0 es la que hace que $S(\infty) = 1$, es decir, que, siendo

$$\beta_0 = \int_0^{\infty} e^{hy} dS(y)$$

hace que $S(x)$ sea una auténtica función de distribución. h es una constante auxiliar que se determinará posteriormente. Se define el conjunto de parámetros

$$\beta_k = \int_0^{\infty} y^k e^{hy} dS(y)$$

la "nueva" función de Poisson generalizada $F(x)$ con distribución de la cuantía de un siniestro S y número esperado de siniestros $\bar{n} = n \beta_0$, se calcula en función de la inicial distribución $F(x)$. La k -ésima convolución de S es calculada de la siguiente forma:

$$dS^{k*}(x) = (\beta_0)^k e^{-hx} dS^{k*}(x)$$

que nos permite obtener la expresión de $F(x)$ en función de $F(x)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-n\beta_1 k}}{k!} d S^{k*}(x) = e^{-n\beta_1} d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{n}\bar{\beta}_1 k}}{k!} S^{k*}(x) = \\ &= e^{-n\beta_1} d F(x) \end{aligned}$$

Dado que el valor probable de S es $\bar{m} = \beta_1/\beta_0$, el valor probable de F resulta ser: $\bar{n} \bar{m} = n \beta_1$. La desviación típica de F será: $\sqrt{n\beta_2/\beta_0} = \sqrt{n\beta_2}$.

Pues bien, aplicando el desarrollo de Edgeworth a esta función de distribución y teniendo en cuenta que $\bar{n} \bar{\alpha}_k = n \beta_k$, se obtiene la relación fundamental:

$$d F(x) = e^{-n\beta_1} d \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi^{(k)}(z) + d R$$

siendo $z = (x - n\beta_1)/\sqrt{n\beta_2}$, R el resto del desarrollo y c_k los coeficientes del mismo, es decir, $c_3' = -\beta_3/6\beta_2\sqrt{n\beta_2}$, etc. El ajuste $d F \approx d(F-R)$ es óptimo en el entorno de la media $z = 0$, es decir, $x = n\beta_1$. Imponiendo esta condición, es decir

$$x = n\beta_1 = n \int_0^{\infty} y e^y d S(y)$$

se obtiene de esta ecuación el valor de h . Si $x < n\beta_1$, $h < 0$, y si $x > n\beta_1$, $h > 0$. Suponiendo éste último, y mediante integración de la ecuación diferencial, se obtendrá:

$$1 - F(x) = e^{-n\beta_1 - nh\beta_1} \int_0^{\infty} e^{-hz\sqrt{n\beta_2}} d \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi^{(k)}(z)$$

Definiendo las llamadas funciones de Esscher como:

$$E_k(u) = \int_0^{\infty} e^{-uz} d \phi^{(k)}(z)$$

y mediante la fórmula de recurrencia:

$$E_k(u) = -\phi^{(k)}(0) + u E_{k-1}(u)$$

Se obtienen las distintas funciones de Esscher a partir de la primera:

$$E_0(u) = \int_0^{\infty} e^{-uz} d \phi(z) = \frac{1 - \phi(u)}{\sqrt{2\pi}\phi'(u)} = \frac{A(u)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{representando: } A(u) = \frac{1 - \phi(u)}{\phi'(u)}$$

De esta forma, las primeras funciones de Esscher resultan ser:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} E_1(u) &= u A(u) - 1 \\ \sqrt{2\pi} E_2(u) &= u^2 A(u) - u \\ \sqrt{2\pi} E_3(u) &= u^3 A(u) - u^2 + 1 \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Pues bien, la aproximación de Esscher a $F(x)$ buscada resulta ser:

$$1 - F(x) = e^{-n w} \{E_0(u) + c_3 E_3(u) + \dots + R\}$$

siendo:

$$u = h \sqrt{n \beta_2}$$

$$w = 1 - \beta_0 + h \beta_1$$

$$c_3 = - \frac{\beta_3}{6 \beta_2 \sqrt{n \beta_2}}$$

R = resto del desarrollo, etc.

Análogos desarrollos conducirían a la correspondiente fórmula de Esscher para el caso en que $x < m$. Las funciones de Esscher E_0 , E_3 , etc., se encuentran tabuladas para distintos valores de u

A efectos de cálculos numéricos, suele ser útil la relación:

$$\begin{aligned}\beta_k &= \int_0^\infty z^k e^{hz} d S(z) = \int_0^\infty z^k (e^{hz} - 1) d S(z) + \int_0^\infty z^k d S(z) = \\ &= \int_0^\infty z^k (e^{hz} - 1) d S(z) + \alpha_k\end{aligned}$$

dado que $e^{hz} - 1$ es más conveniente, para proceder a una integración numérica, que e^{hz} , para valores pequeños de hz .

A su vez, si h es pequeño, el desarrollo en serie:

$$\begin{aligned}\beta_k &= \int_0^\infty z^k e^{hz} d S(z) = \int_0^\infty z^k \sum_{r=0}^\infty \frac{(hz)^r}{r!} d S(z) = \sum_{r=0}^\infty \frac{h^r}{r!} \int_0^\infty z^{k+r} d S \\ &= \sum_{r=0}^\infty \frac{h^r}{r!} \alpha_{k+r}\end{aligned}$$

es suficientemente convergente para establecer cálculos numéricos con una adecuada precisión.

Todo el desarrollo del método de Esscher que hemos venido efectuando se refiere a la aproximación a la función de Poisson

generalizada, es decir, al caso de Poisson. Para el caso de Polya, el método de Esscher tiene, igualmente, plena vigencia, y se puede analizar, por ejemplo, en el reiteradamente comentado trabajo de Bohman y Esscher (pag. 191-193).

Bohman (1), por su parte, ha procedido a la deducción de la fórmula de Esscher por un método diferente, que permite una mejor comprensión de dicho método.

Comparación entre el método NP y el de Esscher

Sobre la base de la información estadística recopilada por Bohman y Esscher en "Studies in Risk Theory...", Pesonen presentó al Risk Theory Symposium celebrado en Estocolmo en 1968 una amplia colección de comparaciones sobre los distintos métodos de aproximación a $F(x,t)$, comparaciones que permiten a Pesonen analizar el comportamiento de los métodos NP y de Esscher en Carteras no reaseguradas y, por tanto, con un alto grado de heterogeneidad. Pesonen extrae la conclusión de que "el método NP y el método de Esscher parecen aportar una parecida fiabilidad, válida para la mayoría de los análisis prácticos, excepto para el caso en que el número probable de siniestros, t , sea pequeño". De igual forma se pronuncia Pesonen en "NP-approximation of Risk Processes" cuando, al analizar la bondad del método NP, en comparación con el de Esscher y el del desarrollo de Edgeworth, constata la bondad pareja de los dos primeros, en comparación con la inferior de este último.

Por su parte, Beard, Pentikainen y el propio Pesonen afirman en "Risk Theory" que "el mejor método- en el sentido de los resultados más ajustados- es el llamado método de Esscher. Hay, de cualquier forma, otro método que precisa de cálculos esencialmente más simples que los necesarios en el método de Esscher y, sim-

(1) Bohman, Harald: What is the reason that Esscher's method of approximation is as good as it is ?. Skand Aktuar. 1963. Häft 1-2.

bargo, produce un error sólo ligeramente superior al producido al aplicar dicho método. Tal método es el llamado "Normal Power" o NP"; en otro pasaje de la obra, se afirma que "la aproximación de Esscher parece aportar resultados suficientemente próximos, incluso en casos en los que la aproximación normal falla completamente a efectos de dar siquiera un correcto orden de magnitud del valor buscado. Posteriores análisis parecen mostrar que, de hecho, la fórmula de Esscher aporta mejores resultados, la menos en los casos críticos, si bien las diferencias se pueden reducir tomando un término más del desarrollo en el método NP (es decir, trabajando con el método NP_3). La experiencia actual es de cualquier forma, demasiado reducida como para extraer de ella alguna conclusión solvente con relación a la comparación entre estas dos aproximaciones, y el análisis de los límites de aplicabilidad de ambas fórmulas está aún abierto".

En definitiva, de los análisis formulados se infiere que, en general, el método de Esscher es el mejor método de aproximación a $F(x,t)$, presentando el inconveniente de su prolijidad, requiere de menores cálculos, si bien es menos preciso que el anterior. El problema, como siempre ocurre en estos casos, es un problema de decisión, donde las variables a considerar son, por una parte, el nivel de precisión deseada, y, por otra, las dificultades técnicas del método. Según sean las necesidades, de cada caso, el método a adoptar será uno u otro.

Modificación del método de Esscher

Como hemos tenido ocasión de ver, el método de Esscher consiste, básicamente, en la aproximación

$$d F(x) = e^{-n-hx+n\beta_0} d_x \sum \bar{c}_k \phi^{(k)}(\bar{z})$$

que produce buenos resultados en el entorno del punto $x = x_0$, es decir, del punto $\bar{z} = 0$.

Esscher usa, para $x_0 \gg n \alpha_1$, la aproximación:

$$1 - F(x_0) = \int_0^\infty e^{-n-hx+n\beta_0} d_x \sum \bar{c}_k \phi^{(k)}(\bar{z})$$

Pesonen (1) ha afirmado que el método de Esscher es el mejor si el problema planteado es calcular el valor de la función $F(x)$ para uno o varios valores grandes de x (esto lo afirmaba en 1964, antes, por supuesto, de establecer el método NP en 1969). Sin embargo, cerca del punto medio $n\alpha_1$, el método es menos interesante, puesto que, en palabras de Pesonen, "entonces es inevitable integrar la dudosa aproximación de dF a lo largo de un intervalo considerablemente grande". Propone entonces Pesonen una modificación del método de Esscher que "precisando de un trabajo similar, evita las dificultades relacionadas con la integración de la ecuación característica del método para los valores de x en los que la aproximación de Esscher no es satisfactoria". Para ello, escribamos la ecuación fundamental de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [dF(x)]_{x=x_0} &= \frac{e^{-n-hx_0+n\beta_0}}{\sqrt{n\beta_2}} \{ \phi^{(1)}(0) + \bar{c}_3 \phi^{(4)}(0) + \\ &+ \bar{c}_4 \phi^{(5)}(0) + \bar{c}_6 \phi^{(6)}(0) \} dx = \\ &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-hx_0+n\beta_0}}{\sqrt{\beta_2}} (1+3\bar{c}_4-15\bar{c}_6) dx \end{aligned}$$

Considerando h variable en función de x , en lugar de considerarla constante para un determinado valor x_0 , se obtiene:

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{-xh(x)+n\beta_0(x)}}{\sqrt{\beta_2(x)}} (1+3\bar{c}_4(x)-15\bar{c}_6(x)) dx$$

Posteriormente, en "Risk Theory", Pesonen propone otra expresión para la modificación del método de Esscher, sobre la base de considerar al parámetro h , que en el método de Esscher era la constante que hacía que $x = n$, como una nueva variable de integración, con lo que se obtiene la nueva aproximación:

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{n/2\pi}} e^{-n} \int_{h_1}^{h_2} \exp\{-h n \beta_1(h) + n\beta_0(h)\} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\beta_2(h)} \{1 + A(h) - B(h)\} dh$$

$$\text{siendo: } \beta_k(h) = \int_0^\infty z^k e^{hz} dS(z); A(h) = \beta_4(h)/8n\beta_2^2(h);$$

$$B(h) = 5\beta_2^3(h)/24n\beta_2^3(h); x_1 = n\beta_1(h_1) \text{ y } x_2 = n\beta_1(h_2).$$

(1) Pesonen, Erkki: A Modification of the Esscher Method. Skand Aktuar. 1964. Häft 3-4. Pag. 160-163.

En un trabajo presentado al coloquio ASTIN celebrado en Lucerna en 1965, Pesonen (1) ha obtenido la aproximación a $F(x)$ a través del método de Esscher modificado, para el caso en que $S(x) = 1 - e^{-x}$, es decir, para el caso en que la distribución de la cuantía de un siniestro sea exponencial, obteniendo:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}} \frac{e^{-(\sqrt{x}-\sqrt{n})^2}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{nx}} \left\{ 1 - \frac{3}{16} (\sqrt{nx})^{-1} \right\}$$

Por otra parte, Pesonen, en dicho trabajo, propone el siguiente lema: Sea $F(x) = F(x; n, S) = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} n^k S^{k*}(x)$ $k!$ la función de Poisson generalizada. Si $S(x)$ se descompone en la forma:

$$S(x) = \sum_{i=1}^r a_i S_i(x), \text{ con } \sum a_i = 1, \text{ entonces se verifica:}$$

$$F(x; n, S) = F(x; a_1 n, S_1) * \dots * F(x; a_r n, S_r).$$

A partir de este teorema, y tomando la funciones polinomiales-exponenciales $S_i(x) = 1 - e^{-b_i x}$, se obtiene:

$$F(x; n, 1 - e^{-x}) = e^{-n} + \int_0^x f(u) du$$

donde

$$f(x) = n e^{-(x+n)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!(k+1)!}$$

Como indica Pesonen, "para valores pequeños de n , número probable de siniestros, digamos $\sqrt{nx} < 10$, la serie obtenida por integración puede ser calculada fácilmente de manera directa, pero tan pronto como \sqrt{nx} se hace grande, el cálculo directo se hace muy laborioso". Afortunadamente, en este caso es posible utilizar las propiedades asintóticas de las funciones de Bessel, por medio del desarrollo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}} \frac{e^{-(\sqrt{x}-\sqrt{n})^2}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{nx}} \left\{ 1 - \frac{3}{16} (\sqrt{nx})^{-1} - \frac{15}{512} (\sqrt{nx})^{-2} - \frac{105}{8192} (\sqrt{nx})^{-3} - \frac{4725}{524288} (\sqrt{nx})^{-4} - \frac{72765}{8388608} (\sqrt{nx})^{-5} + \text{Resto} \right\}$$

Como se puede apreciar, la anterior aproximación no es más que un caso particular de este desarrollo, que comprende, en con-

(1) Pesonen, Erkki: On the Calculation of the Generalised Poisson Function.
The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. II. Febrero 1967.
Pag. 120-128

creto, los dos primeros términos del mismo.

Por último, el trabajo de Pesonen que estamos considerando, concretamente el lema propuesto en el mismo, sugiere la posibilidad de utilizar métodos mixtos de aproximación, por medio de la descomposición por convolución de F manifestada en el lema. En concreto es de interés un trabajo de Hbvinen sobre estas cuestiones. Juzgamos preferible, sin embargo, en el desarrollo estructurado de nuestro trabajo, tratar el tema de los métodos abreviados en su totalidad, antes de plantear la cuestión de utilizar métodos mixtos que los relacionen. Para ello, procederemos a continuación a analizar el método de Monte Carlo y el método de inversión de la función característica.

METODO DE MONTECARLO

a El método de Montecarlo hace uso de los llamados números aleatorios. Estos son elementos de una muestra aleatoria simple procedente de una población uniforme o rectangular cuya variante está definida en el intervalo cerrado $[0,1]$, es decir, con función de densidad: $f(x) = 1, x \in [0,1]$. Representemos a tales números aleatorios por r_i . Existen tablas suficientemente amplias de números aleatorios, y programas que permiten obtenerlos en ordenadores.

La técnica de simulación o método de Montecarlo consiste en generar muestras "simuladas" (no reales), de cualquier población, con función de distribución $F(x)$. En efecto, sea $F(x)$ una función de distribución cualquiera. Sea F^{-1} la función inversa de F . A partir de la sucesión de números aleatorios $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, correspondiente a una muestra aleatoria de una distribución uniforme, podemos generar una muestra "simulada" de $F(x)$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sin más que definir dichos elementos como antiimágenes por F de los r_i , $x_i = F^{-1}(r_i)$, es decir, de raíces de las ecuaciones $F(x_i) = r_i$. Hemos transformado una muestra aleatoria simple de una población conocida (uniforme) en una muestra aleatoria simple (simulada) de cualquier población $F(x)$.

Esta técnica de simulación o de Montecarlo nos permite, por ejemplo, establecer fácilmente (desde el punto de vista teórico)

el cálculo aproximado de la convolución de dos distribuciones. En efecto, sean dos variantes, ξ_1 y ξ_2 , con funciones de distribución $F_1(x)$ y $F_2(x)$, respectivamente, y sea $\xi = \xi_1 + \xi_2$, es decir, la convolución $F = F_1 * F_2$, con F función de distribución de ξ . Tomemos n pares de números aleatorios ($r_{11}, r_{21}; r_{12}, r_{22}; \dots; r_{1n}, r_{2n}$). Las primeras coordenadas serán números aleatorios para la variante ξ_1 , y las segundas para la ξ_2 . De esta forma, $x_{1i} = F_1^{-1}(r_{1i})$ nos dará una muestra aleatoria $\{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\}$ de ξ_2 . Definiendo $x_i = x_{1i} + x_{2i}$, se obtiene una muestra aleatoria $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de ξ . Se ha "simulado" una muestra aleatoria de la distribución buscada $F = F_1 * F_2$. A partir de esta muestra simulada, se puede establecer un cálculo aproximado de F mediante la relación: $F(x) = k_x/n$, donde k_x es el número de los elementos muestrales que verifican $x_i \leq x$. Esta es, en síntesis, la técnica de Montecarlo.

Pues bien, utilicemos dicha técnica para establecer, por simulación, aproximaciones a la función de Poisson generalizada y, en general, a la distribución del daño total.

Como hemos venido diciendo reiteradamente, en la distribución del daño total intervienen dos distribuciones básicas: la del número de siniestros y la de la cuantía de un siniestro. Sea la variante expresiva del daño total, variante del proceso general de riesgo: $X = x_1 + x_2 + \dots + x_N$, siendo N la variante número de siniestros y x_i la variante expresiva de la cuantía del i -ésimo siniestro. Sea $P(x)$ la función de distribución de N , tal que, si la distribución es de Poisson,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{E(x)} e^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

siendo n el número probable de siniestros, $n = E(N)$, y sea $S(x)$ la función de distribución de x_i . Como caso particular, tendremos la función de Poisson generalizada, pero sólo como un caso particular. Apréciase que una ventaja importante del método de Montecarlo en la aproximación a $F(x)$ consiste en que, así como la aproximación normal o el método NP, y, en parte, el método de Esscher, se refieren de manera preferente a la función de Poisson generalizada, el método de Montecarlo se aplica sin dificultad (teórica) a toda distribución $P(x)$, y, en consecuencia, en general, a la distribución del daño total, sean cuales sean sus distribuciones básicas.

Tomemos, en primer lugar, un número aleatorio, que representaremos por r_{10} , y que será utilizado para determinar el primer número aleatorio de siniestros producidos en la muestra simulada. Sea $N_1 = P^{-1}(r_{10})$, es decir, la antiimagen por P de r_{10} . N_1 será el número aleatorio de siniestros producidos de manera simulada. Procede, para cada uno de los que configuran N_1 , definir la distribución de la cuantía de cada siniestro. Se tomarán entonces N_1 números aleatorios, que representaremos por $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{N_1}$, que definen $z_{1i} = S^{-1}(r_{1i})$, $i = 1, 2, \dots, N_1$. Evidentemente,

$$x_1 = \sum_{i=1}^{N_1} z_{1i}$$

puede ser considerado como el primer elemento de una muestra aleatoria, correspondiente a $F(x)$. De esta forma, se generan muestras aleatorias "simuladas" correspondientes a la distribución del daño total, $F(x)$. Para que dichas muestras conduzcan a un conocimiento suficiente de dicha población, es preciso que su tamaño sea suficientemente amplio, y se suele considerar que tal ha de ser del orden de 10.000. Si \underline{n} es el valor probable de N , es decir, el número esperado de siniestros, el procedimiento precisa, en media, de 10.000 ($\underline{n}+1$) números aleatorios, 1 para N y \underline{n} para los x_i . Si \underline{n} es del orden de 10.000, el número preciso de números aleatorios es del orden de 10^8 , lo que, prácticamente, inutiliza el método. Se impone una racionalización del mismo, como vamos a ver.

El procedimiento descrito puede ser racionalizado si se calculan previamente algunas convoluciones, antes de proceder a las simulaciones. Si el entero N se expresa como suma de enteros $h_i > 0$, $N = \sum h_i$, entonces, evidentemente, $S^{N*} = S^{h_1*} * S^{h_2*} * \dots$. En particular, si N es expresado como un número binario, $N = \sum a_k 2^k$, con $a_k = 0$ ó 1 , la convolución total se expresará:

$$S^{N*} = \prod_{a_k=1} S^{2^{k*}}$$

Por otra parte, dado que $2^k = 2 \cdot 2^{k-1}$, las convoluciones $S^{2^{k*}}$ se pueden calcular por medio de la fórmula de recurrencia:

$$S^{2^{k*}} = S^{2^{k-1*}} * S^{2^{k-1*}}$$

Este procedimiento simplificará los cálculos, y, sobre todo, el número preciso de números aleatorios. En efecto, se procederá de la siguiente forma: Se toma, en primer lugar, un número aleatorio, r_{10} , a través del cual se definirá, como antiimagen por P , el número aleatorio de siniestros $N_1, N_1 = P^{-1}(r_{10})$. En el caso de la función de Poisson generalizada, como la distribución de Poisson está tabulada, no hay problemas para la obtención de N_1 , directamente de las tablas ó por interpolación. Mediante sucesivas divisiones por 2, se expresa a N_1 como un número binario, $N_1 = \sum a_k 2^k$, tomándose a continuación los números aleatorios $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1a_k}$. A partir de ellos, y obtenida la convolución 2_k -ésima se obtienen los números aleatorios $z_{1k} = (S^{2_k})^{-1}(r_{11})$ correspondientes a los valores de k para los cuales $a_k = 1$. De esta forma, se obtiene:

$$x_1 = \sum_{a_k=1} z_{1k}$$

que nos da el primer elemento muestral de una muestra correspondiente a $F(x)$. Si, por ejemplo, para una eficaz determinación de $F(x)$, son precisos 10.000 elementos muestrales, únicamente serán necesarios, en términos medios, $10.000 (\log_2 n/2+1)$ números aleatorios. Esto quiere decir que si n es del orden de 10.000, es decir, el número probable de siniestros es, digamos, $n = 10.000$, e vez de los 10^8 números aleatorios que serían precisos según el primer método, serán necesarios tan sólo $10.000 (\log_2 10.000/2+1) = 10.000 \times 76.400 \approx 80.000$ números aleatorios, con lo que se considera que se reduce a la milésima parte el tiempo de trabajo preciso para establecer la aproximación a $F(x)$.

Como dice Beard en "Risk Theory", "el método de Montecarlo presenta su máxima utilidad cuando n es pequeño. Si es necesaria una gran precisión, por ejemplo, si el error cometido no debe exceder de una diezmilésima, el método se hace extremadamente oneroso. Afortunadamente, desde el punto de vista práctico, raramente es necesario tal tipo de precisión". El meteórico desarrollo de la informática en los últimos tiempos viene a potenciar de manera extraordinaria la utilización del método de Montecarlo, no sólo en la aproximación a $F(x)$, sino en diversas aplicaciones actuariales.

METODO DE INVERSION DE LA FUNCION CARACTERISTICA

A partir de una función de distribución $F(x)$, es posible determinar la función característica que le corresponde, mediante la relación:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

Pues bien, como es sabido, la fórmula de inversión de Fourier

$$F(x) = F(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-itx}}{it} \phi(t) dt$$

permite, a su vez, calcular $F(x)$ conocida la función característica de su distribución. Supongamos que F es la función de Poisson generalizada. Entonces, según hemos tenido ocasión de ver con anterioridad, siendo ϕ la función característica de F y ψ la de S , distribución de la cuantía de un siniestro:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dS(x)$$

se verifica la relación: $\phi = e^{n(\psi-1)}$, donde n es el número probable de siniestros, por lo que, conocido n y S , se conocerá n y ψ y, en consecuencia, ϕ , lo que, aplicando la fórmula de inversión de Fourier, nos conduce al conocimiento de F , función de Poisson generalizada.

El inconveniente fundamental de este método es que, siendo aparentemente sencillo (por lo menos a nivel teórico), es extremadamente laborioso.

Dado que la integral impropia se calculará, como es obvio, como límite en la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T$$

se presenta el problema, al que alude Beard en "Risk Theory", de que "no resulta sencillo estimar la magnitud de T que debe de ser elegida para alcanzar resultados suficientemente plausibles". En este sentido es interesante el trabajo de Bohman (1) en el que,

(1) Bohman, Harald: To Compute the Distribution Function when the Characteristic Function is Known. Skand. Aktuar 1963. Häft 1-2.

mediante transformaciones en la fórmula de inversión, de límites superior e inferior a $F(x)$, lo que conduce a una estimación del error cometido. Como indica Beard, "aunque laborioso, este método tiene interés como un medio a través del cual los métodos aproximativos pueden ser contrastados para algunos valores de prueba del parámetro n y para diferentes clases de funciones de S . Si se aproxima S por medio de una suma de funciones exponenciales y funciones discontinuas, el cálculo de $\phi(t)$ (su función característica) y el de la integral de Fourier no es, afortunadamente, laborioso, y tales cálculos han sido llevados a cabo con éxito". El tema de la aproximación de S por medio de varias funciones, sean éstas exponenciales, discontinuas, o del tipo que sean, nos conduce al planteamiento de los que podríamos llamar métodos mixtos de aproximación, que procedemos a analizar en el siguiente apartado.

MÉTODOS MIXTOS DE APROXIMACION

Un planteamiento interesante, que mejora la aplicabilidad de los métodos de aproximación a la distribución del daño total $F(x)$ es analizado por Beard, Pentikainen y Pesonen en "Risk Theory" en los siguientes términos: "El dominio de aplicabilidad de la distribución normal puede ser frecuentemente ampliado dividiendo la distribución $S(z)$ en dos partes. Los siniestros cuya cuantía sea menor que un cierto límite z_0 puede ser aproximados de manera suficiente por medio del método normal, o bien del NP, mientras que la cola $z > z_0$ puede ser calculada separadamente, teniendo en cuenta el hecho de que el número esperado de siniestros, n , es tan pequeño en dicha cola que no resulta posible efectuar cálculos en ella sin una gran dificultad. La requerida función de distribución F puede entonces ser obtenida por convolución de las dos distribuciones parciales". Se trata, en definitiva, de deslindar distintos campos de variabilidad de la variante "cuantía de un siniestro". De esta forma, por métodos mixtos de aproximación entenderemos métodos que proceden, en primer lugar, a dividir el dominio de la variante en distintos intervalos, para pasar a determinar la distribución buscada en cada uno de ellos y, por convolución, integrarlas en una sola distribución. De esta forma, para los distintos tramos de la variante se pueden aplicar distintos métodos de aproximación.

Analícemos, en este sentido las aportaciones de Honiven. En un trabajo presentado al coloquio ASTIN celebrado en Lucerna en 1.965, Esa Hovinen (1) propone el cálculo de $F(x)$ mediante una partición de la función de distribución de un siniestro, $S(x)$, en la siguiente forma:

$$S(x) = p_1 S_1(x) + p_2 S_2(x) + p_3 S_3(x)$$

donde:

$$p_1 = S(x_1)$$

$$p_2 = S(x_2) - S(x_1)$$

$$p_3 = 1 - S(x_2), x_2 \geq x_1$$

Las funciones $S_r(x)$ son:

$$S_1(x) = \begin{cases} S(x)/p_1 & \text{cuando } x \leq x_1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$S_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_1 \\ \{S(x) - S(x_1)\}/p_2 & \text{cuando } x_1 < x \leq x_2 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$S_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_2 \\ \{S(x) - S(x_2)\}/p_3 & \text{cuando } x > x_2 \end{cases}$$

De acuerdo con el lema propuesto por Pesonen en su trabajo "On the Calculation of the Generalised Poisson Function", que anteriormente reseñamos, la distribución de Poisson generalizada $F(x)$ puede ser entonces expresada como una convolución de tres distribuciones de Poisson generalizadas, de la siguiente forma:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-n} n^k}{k!} S^{k*}(x) = F_1(x) * F_2(x) * F_3(x)$$

donde

$$f_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-p_r n} (p_r n)^k}{k!} S_r^{k*}(x)$$

son funciones de Poisson generalizadas. Hovinen propone que la función F_1 sea calculada por medio de la aproximación normal, y las funciones F_2 y F_3 por medio del método de Montecarlo. Las

(1) Hovinen, Esa: A Procedure to Compute Values of the Generalised Poisson Function. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. II. Febrero, 1967. Pag. 129-135

convoluciones finales, $F = F_1 * F_2 * F_3$, se calcularán, así mismo, por simulación. Por último, Hovinen procede al análisis de los valores x_1 y x_2 más adecuados.

METODOS PROGRAMABLES

Entre los "machine oriented methods" a que se refieren Bohman y Esscher en "Studies in Risk Theory..." se encuentran los siguientes, a los que nos referiremos de una manera muy sintética y esquemática:

- a/ Un método basado en el cálculo de ciertos valores de la convolución $V^{n*}(x)$, que tiene su origen en la idea de Benktander de sustituir la función $V(x)$ por una función de Salto o discontinua.
- b/ Hacer una elección especial de $V(x)$ con la finalidad de simplificar el cálculo de la convolución $V^{n*}(x)$. En este sentido, como indican Bohman y Esscher, "la experiencia hasta el presente (1963) ha mostrado que las funciones de distribución de la cuantía de un siniestro que se producen en la práctica pueden, en múltiples casos, ser representadas por medio de polinomios exponenciales, tal como había propuesto Almer, excepto posiblemente para valores de x extremadamente grandes". De esta forma, proponen una función del siguiente tipo:

$$V(x) = A_1 (1 - e^{-\alpha_1 x}) + A_2 (1 - e^{-\alpha_2 x}) + A_3 \epsilon(x-b)$$

donde $A_1 + A_2 + A_3 = 1$, y en donde el último sumando sirve para adaptar grados de peligrosidad del riesgo, pues, como expresa Bohman y Esscher, "variando los parámetros - particularmente los parámetros A_3 y B - es posible con esta fórmula representar la función de distribución de los siniestros de diferente "grados de peligrosidad" (degrees of danger).

A la anterior expresión de $V(x)$ la corresponde una función característica

$$v(u) = A_1 v_1(u) + A_2 v_2(u) + A_3 v_3(u)$$

En el caso de Poisson se tendrá que

$$F(x, t) = F_1(x, A_1 t) * F_2(x, A_2 t) * F_3(x, A_3 t)$$

donde F_1 y F_2 son las funciones de distribución correspondientes a los dos primeros términos de $V(x)$ mientras que F_3 es la función de distribución correspondiente a una distribución de Poisson simple.

c/ Por último, constataremos la existencia de un método de aproximación, llamado método-c, basado en la siguiente idea: Dada una función característica, $f(u)$, se calculará numéricamente a partir de la fórmula de inversión. En este procedimiento, se pueden cometer dos tipos de errores:

I/ El correspondiente a la sustitución del intervalo $(-\infty, \infty)$ por un intervalo finito.

II/ La integral sobre ese intervalo finito se reemplaza por una aproximación usando valores discretos del integrando. La base del método radica en que $f(u)$ será multiplicada por una función apropiada, la cual es idénticamente nula fuera de un intervalo finito y elegida de tal forma que la función de distribución correspondiente a esta función característica modificada sea, o bien más grande, o bien más pequeña que $F(x)$ para todo valor de x . Ello significa que el error procedente de la operación de truncar el intervalo está bajo control.

La ventaja fundamental que tiene el método-c es que permite una gran libertad en la elección del método para representar la distribución de siniestros.

Estos son los métodos programables fundamentales. Prescindimos de una mayor extensión sobre ellos por tratarse de métodos que aún no han dado los frutos apetecidos y sobre los que queda mucho por escribir e investigar. Son su sucinta exposición hemos querido únicamente ampliar el arco de nuestro análisis, para que éste contemple el estado actual de las investigaciones, aunque éstas no se hayan traducido, hasta el momento presente, en fructíferas aplicaciones. Siempre ha ocurrido así en la historia de la ciencia.

Antes de pasar a una modelización completamente distinta del proceso de riesgo, cual es la formulada por Bertil Almer, digamos que, desde el punto de vista práctico, son interesantes los

métodos de aproximación a la distribución del daño total, $F(x)$, que no precisan de hipótesis previas sobre las distribuciones básicas (los llamados métodos de libre distribución). En este sentido, resulta interesante el trabajo de Andreasson titulado "Distribution free approximations in applied Risk Theory" (1).

MODELO DE ALMER

Las dificultades prácticas que surgen al intentar determinar la distribución del daño total, y la necesidad de plantear desde un principio el problema de los factores de riesgo, han dado lugar a ensayos para elaborar una Teoría General de los seguros no-vida. El autor que quizá haya hecho la mayor aportación en este sentido ha sido el sueco Bertil Almer. En la bibliografía de nuestro trabajo se recogen sus aportaciones escritas fundamentales. Las ideas principales de este autor son las siguientes:

Conjuntos finitos de elementos de riesgos. - Presta Almer su atención no sobre los siniestros o accidentes en sí, sino sobre las situaciones de riesgo que los generan (siniestros en potencia). Cada situación de riesgo constituye un elemento de riesgo ($p_i, \psi_i(x)$). Estos conjuntos pueden ser infinitos, aunque en el análisis técnico se opera con la parte principal, que constituye un conjunto finito.

Almer analiza las propiedades de estos conjuntos como un problema puramente matemático, introduciendo medidas de concentración y probando que éstas son suficientes para caracterizar las propiedades del conjunto.

El espacio S de los elementos de riesgo está constituido por cualquier combinación de elementos de riesgo pertenecientes al seguro o a un ramo especial. Un sistema de elementos de riesgo es todo conjunto de elementos de riesgo definido de acuerdo con la teoría de conjuntos. No obstante, en la práctica, se limita el número de participantes al agrupar éstos con arreglo a unas características definidas. Para cada grupo de riesgos se introducen las correspondientes variables.

A partir de aquí, se establecen las siguientes notaciones para el análisis del riesgo y los estudios estadísticos:

(1) Andreasson, Gunnar: Distribution free approximations in applied Risk Theory. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. I. Enero 1966. Pag. 11-18

Grupos de riesgo

	<u>a priori</u>	<u>a posteriori</u>
Número de seguros =	$N(I)$	
sumas aseguradas =	$S(I)$	
Número de siniestros =	$n \dots \dots \dots$	v
Frecuencia de siniestros =	$f = n/N \dots \dots \dots$	$\phi = v/N$
Siniestro individual =	$x_j \dots \dots \dots$	ξ_j
Suma total de siniestros =	$y = \sum_{j=1}^n x_j \dots \dots$	$\eta = \sum_{j=1}^v \xi_j$
Valor medio del siniestro =	$\bar{x} = m \dots \dots \dots$	$\bar{\xi} = \eta/v$
Media de la suma total =	$nm = \int_0^{\infty} y \cdot 0(y) dy = \bar{y}$	
Prima de riesgo =	$r = Y/N \dots \dots \dots$	$\rho = n/N$
Prima de riesgo relativo =	$y/S(y) \cdot 1000$	
Porcentaje de pérdida	$100y/p$	

La relación que existe con los elementos de riesgo a priori es:

$$n = \sum_{i=1}^N P_i \quad m = \bar{x} = \sum m_i P_i / n$$

siendo m_i la media de la curva de siniestros del elemento i -ésimo de riesgo, es decir, de $\psi_i(x)$. La curva de siniestros en el grupo será:

$$\bar{\psi}(x) = \sum P_i \psi_i(x) / n$$

El problema que se intenta resolver es el de obtener:

a/ Un sistema de riesgos simplificados u homogeneizado con el mismo $\{n/\psi(x)\}$ y con las mismas propiedades aproximadamente.

b/ Límites de los errores o, al menos, alguna estimación, así como una estimación de la diferencia efectiva y el sistema de Poisson correspondiente con los mismos valores para:

- Grupos de riesgo $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$
- Número de siniestros a priori.... n
- Curva de siniestros $\bar{\psi}(x)$
- Importe total de siniestros a priori = y

Este problema lo resuelve Almer mediante las llamadas fórmulas de error, mediante las cuales pasa de los elementos de riesgo a distribuciones binomiales homogéneas y de éstas a las distribuciones de Poisson. En estas demostraciones se pone de manifiesto la importancia que tiene el grado de no-homogeneidad que el autor introduce en las demostraciones.

Para los elementos de riesgo que no son independientes, crea Almer el concepto de líneas de riesgo ramificadas. Con ello, extiende el sistema de riesgo a aquellos que están en las líneas de riesgo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ en número finito, todas ellas partiendo de la línea 0 y con probabilidades p_1, p_2, p_3, \dots . Como quiera que se pueden dar nuevas líneas de riesgo a partir de éstos, se llega a una ramificación en forma de árbol como expresión de un sistema completo de líneas condicionales de elementos de riesgo. Se introduce el concepto de línea de acción para ordenar todo los elementos de riesgo según el tiempo en una sola línea, llegando a construir un sistema completo de elementos mediante sucesivas extensiones, llegando así al teorema de uniformación: Cada sistema de probabilidades condicionadas puede ser uniformado y expresado por medio de un sistema finito de líneas de acción igual a los conjuntos finitos de elementos de riesgo independientes.

En cuanto a la distribución de la cuantía de cada siniestro ya hemos visto que Almer propone la llamada distribución de polinomios exponenciales. Es preciso tener en cuenta que el paso de las distribuciones básicas a la distribución del daño total entraña un problema que generalmente se analiza a través de las funciones características. Las fórmulas en las funciones características son muy complicadas y solamente utilizables en la práctica para valores grandes (aproximaciones de Esscher).

Cuando se utiliza una sola exponencial (junto con la distribución de Poisson), se llega a una distribución del daño total, expresada en base de las funciones de Bessel, cuyo comportamiento asintótico da lugar al desarrollo de Hankel.

Para el caso más general, es preciso hallar la convolución de funciones de Bessel pero que, mediante una doble transformación de Laplace, se llega a expresiones simplificadas de fácil aplicación en aquellos casos en que se utilizan tres o cuatro términos.

Por último, es preciso mencionar las aportaciones de Almer referentes al análisis del factor, aplicado a la tarificación del seguro del automóvil. La relación existente entre el método propuesto por Almer y la conocida teoría de la bondad del ajuste ha sido aclarada por Philipson (1), colaborador de Almer en las investigaciones llevadas a cabo por la Asociación Sueca de Tarifas del Automóvil.

Con todo lo visto anteriormente, hemos contemplado el análisis estadístico del proceso de riesgo, que nos habla de la siniestralidad total producida al ente asegurador. En base a las estimaciones de siniestralidad formuladas, se procederá al establecimiento del precio del riesgo, la llamada tarificación estadística, denominada así, por basarse en los modelos estadísticos y en la disponibilidad de estadísticas de siniestralidad con cuya información se establecen dichas cuantificaciones del riesgo. Se trata, en definitiva, de establecer la llamada prima del riesgo o pura, resultado de la experiencia estadística de siniestralidad proyectada al futuro como modelo estocástico. Posteriormente, en el capítulo III de este trabajo se procederá a analizar la formación del precio del riesgo, con la introducción de las componentes de estabilidad del ente asegurador (recargo de seguridad) y comerciales (recargos comerciales). Pero antes de ello, vamos a plantear el problema fundamental de la tarificación de riesgos, en sus dos vertientes, a priori y a posteriori.

(1) Philipson, Carl: A method of Estimating Grouped frequencies. Skand. Aktuar. 1959. Häft 3-4.

-III

LA FORMACION DEL PRECIO

III.1.-EL PROBLEMA DE LA TARIFICACION ESTADISTICA

Comenzamos con este apartado el estudio del objeto fundamental de esta parte segunda de nuestro trabajo, cual es la tarificación estadística. Los cuatro apartados anteriores de esta parte II han ido destinados a sentar las bases teóricas del modelo de tarificación estadística. Procede, por tanto, que abordemos dos cuestiones: la definición del concepto y su análisis. El concepto de tarificación está suficientemente establecido en el ámbito de la ciencia actuarial. Consideramos de interés, sin embargo, abordar esta cuestión, siquiera sea someramente, a efectos de fundamentar nuestro estudio sobre bases sólidas. En su Diccionario de Seguros, Castelo y Pérez Escacho (1) definen la tarificación como aquella "actividad encaminada, previos cálculos técnicos y estadísticos oportunos, a determinar las tasas o tipos de prima aplicables a los diferentes riesgos, cuya cobertura puede realizarse a través de una rama o modalidad de seguro", siendo prima la "aportación económica que ha de satisfacer el contratante o asegurado a la entidad aseguradora en concepto de contraprestación por la cobertura de riesgos que ésta le ofrece". Así pues, podemos decir, sucintamente, que prima es el precio del servicio de seguridad prestado por el ente asegurador, el precio del riesgo, en una palabra, y tarificación es el proceso que tiene por objeto la determinación de primas equitativas para cada riesgo, sin olvidar que tales primas deben proporcionar una adecuada estabilidad a la entidad aseguradora. Estas dos componentes de equitatividad y estabilidad son básicas en todo proceso de tarificación, como resalta Carlson en un trabajo que posteriormente analizaremos.

Como dice Buhlman (2) en su análisis de los principios del cálculo de primas, "el cálculo de primas está basado en la hipó-

(1) Castelo Matran, Julio- Pérez Escacho, José Luis: Diccionario Básico de Seguros. Edl. Mapfre. 1972.

(2) Buhlman, Hans: Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag, 1970
Pag. 85.

tesis de que un conjunto de riesgos de realización aleatoria puede ser compensado mediante unos pagos fijos, a los que se denomina primas". De esta forma, "la prima será calculada sobre la base de un principio de equivalencia" que se establecerá en los siguientes términos:

$$P = \psi\{F(x,t)\}$$

siendo $F(x,t)$ la función de distribución del daño total para un periodo definido por el tiempo operacional t (número probable de siniestros) y la función que asigna un número real positivo p (prima) a cada distribución $F(x,t)$.

Buhlman establece la siguiente clasificación fundamental:

- a/ Si $F(x,t)$ es la función de distribución del daño total de un riesgo conocido, entonces $P = \psi\{F(x,t)\}$ es la prima de riesgo (risk premium).
- b/ Si $F(x,t)$ es la función de distribución del daño total del riesgo en un colectivo (con un determinado parámetro de riesgo), entonces $P = \psi\{F(x,t)\}$ es la prima colectiva (collective premium).

Volveremos posteriormente sobre esta importante diferenciación de primas. Nos interesa ahora, de manera fundamental, analizar los principios del cálculo de primas, según el esquema propuesto por Buhlman.

Principios Del Cálculo De Primas

Una función ψ que asigna una prima P a cada distribución del daño total $F(x,t)$ es, en la terminología de Buhlmann, un "principio de cálculo de primas" o un "principio de equivalencia". Los principios de cálculo de primas más importantes son los siguientes:

- a/ Principio del valor esperado (con nivel λ)

$$\psi\{F(x,t)\} = (1+\lambda) \int_0^{\infty} x d F(x,t) = (1+\lambda) E(X) \quad (\lambda \geq 0)$$

siendo X la variante de la distribución del daño total, con dominio en el campo real positivo.

- b/ Principio de la desviación típica (con nivel α)

$$\psi\{F(x,t)\} = E(X) + \alpha \sigma(X) \quad (\alpha \geq 0)$$

donde $\sigma(X)$ es la desviación típica de la distribución de X .

c/ Principio de la varianza (con nivel β)

$$\psi\{F(x,t)\} = E(X) + \beta \sigma^2(X) \quad (\beta \geq 0)$$

siendo σ^2 la varianza de X .

d/ Principio de la utilidad nula

$$\psi\{F(x,t)\} = P, \text{ tal que } E\{u(P-X)\} = u(0)$$

siendo $u(x)$ una función de utilidad que verifica las condiciones de ser monótona creciente y de utilidad marginal decreciente, es decir, $u'(x) \geq 0$ y $u''(x) \leq 0$, hipótesis comúnmente aceptadas en la Teoría Económica clásica. La segunda condición expresa la aversión al riesgo del decisor (función de utilidad cóncava).

El principio de la utilidad nula establece que la utilidad $u(0)$, antes de asumir la responsabilidad de hacer frente al pago de los siniestros que se produzcan, debe ser igual a la utilidad esperada $E u(P-X)$ después de asumir la citada responsabilidad a cambio de un nivel de primas P .

Un caso particular de interés es aquél en que la función de utilidad es un polinomio de segundo grado

$$u(x) = x - \frac{1}{2c} x^2 \quad \text{con } x \leq c$$

En este caso, se verifica:

$$\psi\{F(x,t)\} = E(X) + c - \sqrt{c^2 - \sigma^2(X)} \approx E(X) + \sigma^2(X)/2c \text{ para } \sigma^2(x) < c$$

en cuyo caso el principio de la utilidad nula coincide, como primera aproximación, con el principio de la varianza, $\beta = 1/2c$.

Discusión De los Principios del Cálculo de Primas

Buhlmann analiza los principios del cálculo de primas en los siguientes términos:

a/ El principio del valor esperado es casi siempre utilizado en el seguro de vida; en contraste con ello, es totalmente utilizado en los seguros de cosas y de accidentes. La principal razón de ello es, probablemente, la aparente heterogeneidad de los colectivos que se presentan en el seguro no-vida, que impide un "cálculo medio".

- b/ El principio de la desviación típica es, probablemente, el utilizado con mayor frecuencia en los seguros de cosas y accidentes. Es un modelo lineal con respecto a un cambio proporcional en la experiencia de siniestros, y ésta es la razón fundamental de su popularidad. Más aún, si la distribución de probabilidad de X (de la cuantía del daño total) es normal, entonces todas las primas presentan la misma posibilidad de ser excedidas por los siniestros acaecidos. Este último argumento de cualquier forma, es de escaso peso, toda vez que la distribución del daño total para cada asegurado puede (y con frecuencia así será) diferir sustancialmente de la distribución normal.
- c/ El principio de la varianza no es tan popular como el de la desviación típica. Sin embargo, presenta consideraciones teóricas de peso a su favor. De cualquier forma, la propiedad de linealidad en el caso de un cambio proporcional en la magnitud de los siniestros no se verifica en este principio. Por otra parte, se presenta linealidad con respecto a la suma de riesgos independientes.
- d/ El principio de la utilidad nula es de gran interés teórico, si bien presenta dificultades prácticas de elección de hipótesis sobre la función de utilidad.

Todos los principios definen una prima que no debe ser inferior al coste esperado de siniestros. Está muy extendida la costumbre de dividir la prima en dos apartados fundamentales: coste esperado de siniestros y recargo de seguridad. Consideraremos el cálculo de primas dependiente de la determinación del valor probable $E(X)$ y de la desviación típica $\sigma(X)$ de la cuantía del daño total, X . El principio de la utilidad nula requerirá el conocimiento de momentos de orden superior de la distribución de X .

Los niveles (parámetros) λ , α y β , y la función de utilidad u son variables de decisión cuya determinación precisa de hipótesis y un análisis de la estabilidad del ente asegurador.

Prima de Riesgo Y Prima Colectiva

Como hemos indicado anteriormente el cálculo de primas se base en un principio de equivalencia: $P = \psi\{F(x,t)\}$, donde $F(x,t)$ es la función de distribución del daño total, para un periodo con tiempo operacional t , y ψ la función que asigna un número real positivo P (prima) a cada distribución $F(x,t)$. Según el tipo de riesgo que analicemos y cuantifiquemos, estaremos hablando de uno de los dos posibles tipos de primas siguientes:

- a/ Si $F(x,t)$ es la función de distribución del daño total del riesgo individual, entonces $P = \psi\{F(x,t)\}$ es la llamada prima de riesgo.
- b/ Si $F(x,t)$ es la función de distribución del daño total del riesgo en el colectivo asegurado, entonces $P = \psi\{F(x,t)\}$ es la prima colectiva.

Analicemos estos dos tipos de primas, para lo que vamos a seguir la exposición realizada por Jesus Vegas Asensio en su trabajo "Aplicación de la teoría de la credibilidad a la tarificación de riesgos"(1), basada en la modelización establecida por Hans Buhlmann en su obra anteriormente reseñada. Para ello, estableceremos las siguientes definiciones:

Riesgo: Es un siniestro en potencia. Se caracteriza por:

- 1/ El proceso del número de siniestros, $P_n(t)$, con sus correspondientes probabilidades de transición.
- 2/ La distribución condicionada $G(x/n) = P(X_n(t) \leq x)$, siendo $X_n(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Cuando X y n son independientes, $G(x/n)$ es la convolución n -ésima de $V(x)$.

Colectivo: Es un conjunto de riesgos. Cada riesgo está definido por un parámetro θ . Este parámetro se define con mucha generalidad, no es necesario que sea real. El colectivo $\Omega = \{\theta\}$ expresa la totalidad de riesgos identificados por el parámetro θ . El riesgo θ en el colectivo Ω se formularía de la siguiente forma:

$$\text{riesgo } \theta = \{P_n^{(\theta)}(t), G^{(\theta)}(x/n)\}$$

(1) Vegas Asensio, Jesús: Aplicación de la teoría de la credibilidad a la tarificación de riesgos. Seguros nº52. Octubre-Diciembre 1974. Pag. 321-340

Por ejemplo si el proceso de llegada es de Poisson con probabilidades

$$P_n(\theta(t)) = \frac{(\theta t)^n}{n!} e^{-\theta t}$$

y $G^{(n)}(x/n) = v^{n*}(x)$, entonces la distribución del daño total será:

$$F^{(\theta)}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\theta t} \frac{(\theta t)^n}{n!} v^{n*}(x)$$

En este supuesto, conocemos la forma de $F^{(\theta)}(x,t)$, que es una distribución de Poisson compuesta; es el parámetro θ lo que resulta desconocido. Por ejemplo, en el seguro del automóvil, el riesgo θ sería una póliza determinada, y el colectivo Ω podría ser el conjunto de pólizas que cubren automóviles de una misma categoría y uso.

La prima de riesgo se definirá de la siguiente forma:

$$P(\theta) = \psi\{F^{(\theta)}(x,t)\}$$

de donde resulta:

$$\mu(\theta) = \int_0^{\infty} x \, dF^{(\theta)}(x,t) \quad (\text{coste de siniestralidad esperado del riesgo}).$$

$$\sigma^2(\theta) = \int_0^{\infty} \{x - \mu(\theta)\}^2 \, dF^{(\theta)}(x,t) \quad (\text{Varianza del coste de siniestralidad}).$$

A partir de aquí la prima de siniestralidad se calculará en función de alguno de los siguientes principios:

a/ Según el principio del valor esperado: $P(\theta) = (1+\lambda)\mu(\theta)$

b/ Según el principio de la desviación típica: $P(\theta) = \mu(\theta) + \alpha\sigma(\theta)$

c/ Según el principio de la varianza: $P(\theta) = \mu(\theta) + \beta\sigma^2(\theta)$.

De forma análoga a la expuesta para la prima de riesgo, podemos calcular la prima colectiva. La diferencia estriba únicamente en que, en este último, deberemos operar con el proceso de riesgo colectivo.

Representando a la función de siniestralidad total del colectivo por $F(x,t)$, si $U(\theta)$ es la distribución de probabilidad del parámetro en el colectivo (función de estructura), podremos poner:

$$F(x,t) = \int_{\theta} F^{(\theta)}(x,t) \, dU(\theta) \quad (1)$$

$$\text{siendo } \mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x, t)$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \, dF(x, t)$$

Las expresiones μ y σ^2 de la prima del colectivo podrán obtenerse, o bien de la ecuación (1), o bien de los valores $\mu(\theta)$ y $\sigma^2(\theta)$ del riesgo. En efecto:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x, t) = \int_{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF^{(\theta)}(x, t) \, dU(\theta) = \\ &= \int_{\theta} \mu(\theta) \, dU(\theta) = E\{\mu(\theta)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \, dF(x, t) = \int_{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu(\theta) + \mu(\theta) - \mu)^2 \, dF^{(\theta)}(x, t) \, dU(\theta) \\ &= \int_{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \{x - \mu(\theta)\}^2 \, dF^{(\theta)}(x, t) \, dU(\theta) + \int_{\theta} (\mu(\theta) - \mu)^2 \, dU(\theta) = \\ &= \int_{\theta} \sigma^2(\theta) \, dU(\theta) + \int_{\theta} (\mu(\theta) - \mu)^2 \, dU(\theta) = E\{\sigma^2(\theta)\} + \text{Var}\{\mu(\theta)\} \end{aligned}$$

En definitiva tendremos:

$$\begin{aligned} \mu &= E\{\mu(\theta)\} \\ \sigma^2 &= E\{\sigma^2(\theta)\} + \text{Var}\{\mu(\theta)\} \end{aligned}$$

Según el principio aplicado, tendremos que la prima colectiva será:

a/ $P = (1 + \lambda) \mu$, para el principio del valor esperado.

b/ $P = \mu + \alpha \cdot \sigma$, para el principio de la desviación típica.

c/ $P = \mu + \beta \sigma^2$, para el principio de la varianza.

El problema que nos surge es el siguiente: ¿Cómo calcular la prima de un determinado riesgo, siendo conocida la prima del colectivo a que pertenece el citado riesgo. Desgraciadamente, en la práctica, la prima de riesgo no se llega a conocer en la mayoría de los casos. Sin embargo, existen dos importantes excepciones a esta regla general:

a/ Si el colectivo es estadísticamente homogéneo. En este caso, como se comprueba fácilmente, la prima de riesgo coincide con la prima colectiva.

b/ Si el riesgo puede observarse durante un largo periodo de tiempo, y si la siniestralidad durante el periodo de observación es estacionaria. Esto significa que las condiciones del riesgo no varían con el tiempo físico.

Es fácil advertir que, de acuerdo con las definiciones propuestas, en el seguro de vida, la prima de riesgo puede estimarse en grupos de pequeño tamaño, al ser aceptable la hipótesis de trabajo de homogeneidad en el colectivo (caso a). Esta hipótesis se cumple rara vez en el seguro no-vida; por ello, la excepción b es más difícil de encontrar en la práctica aseguradora que la excepción a.

Aunque la prima de riesgo no se suele poder obtener de la observación estadística, sin embargo, juega un papel importante desde el punto de vista conceptual. Representa la "prima teórica de cada riesgo individual y puede obtenerse por aproximación.

Una vez establecida con claridad la diferencia entre ambas clases de primas, vamos ahora a estudiar la conexión formal que las vincula.

La prima de riesgo se obtiene mediante la aplicación de la funcional ψ a la función de distribución $F^{(\theta)}(x,t)$, para un parámetro de riesgo conocido. En símbolos, tendremos: $P(\theta) = \psi\{F^{(\theta)}(x,t)\}$. Dentro de un colectivo Ω , la prima de riesgo $P(\theta)$ es, a su vez, una variable aleatoria, con función de distribución $V_p(\delta) = P(P(\theta) \leq \delta)$. Esta nueva función se puede determinar a partir de la función de estructura $U(\theta)$, ya que P es función de θ . Parece entonces natural aplicar el principio de equivalencia ψ por segunda vez (para compensar el riesgo estructural) a la nueva función $V_p(\delta)$, a fin de obtener la prima del colectivo : $P^* = \psi\{V_p(\delta)\}$. Sin embargo, esta prima P^* en general no coincide con la prima colectiva tal y como la hemos definido anteriormente. Para verificar esta afirmación, calculemos P^* por los principios del valor esperado, varianza y desviación típica, y comparemos los resultados obtenidos con la prima calculada directamente (P). Si se cumple que $P^* = P$, entonces el principio aplicado se dirá que goza de la propiedad de ser iterativo.

a/ Principio del valor esperado.

$$P(\theta) = (1+\lambda) \int x \, d F^{(\theta)}(x,t)$$

$$\begin{aligned} P^* &= (1+\lambda) \int P(\theta) \, d U(\theta) = (1+\lambda)^2 \iint s \, d F^{(\theta)}(x,t) \, d U(\theta) \\ &= (1+\lambda)^2 \int s \, d F(x,t) = (1+\lambda) P \end{aligned}$$

b/ Principio de la desviación típica:

$$P(\theta) = \mu(\theta) + \alpha \sigma(\theta)$$

$$P^* = E\{\mu(\theta)\} + \alpha\{E\{\sigma(\theta)\} + \sqrt{\text{Var}\{\mu(\theta) + \alpha \sigma(\theta)\}}\}$$

Si prescindimos de los términos en α^2 ($\alpha \leq 1$), resulta:

$$P^* \approx E\{\mu(\theta)\} + \alpha\{E\{\sigma(\theta)\} + \text{Var } \mu(\theta)\}$$

Por otra parte, el método directo nos daba:

$$P = E\{\mu(\theta)\} + \alpha \sqrt{E\{\sigma^2(\theta)\} + \text{Var } \mu(\theta)}$$

c/ Principio de la varianza:

$$P(\theta) = \mu(\theta) + \beta \sigma^2(\theta)$$

$$P^* = E\{\mu(\theta)\} + \beta\{E\{\sigma^2(\theta)\} + \text{Var}\{\mu(\theta) + \beta \sigma^2(\theta)\}\}$$

Prescindiendo de los términos en β^2 ($\beta \leq 1$), resultará:

$$P^* \approx E\{\mu(\theta)\} + \beta\{E\{\sigma^2(\theta)\} + \text{Var } \mu(\theta)\}$$

La prima colectiva calculada directamente es:

$$P = E\{\mu(\theta)\} + \beta \{E\{\sigma^2(\theta)\} + \text{Var } \mu(\theta)\}$$

En conclusión:

Principio del valor esperado: $P^* \neq P$

Principio de la desviación típica: $P^* \neq P$

Principio de la varianza: $P^* \approx P$

Luego el principio de la varianza es el único iterativo, en una primera aproximación. Sin embargo, es exactamente iterativo si la varianza del riesgo $\sigma^2(\theta)$ es independiente del parámetro θ . Esta propiedad es de un gran interés teórico y motiva la mayor utilidad del principio de la varianza frente al de la desviación típica.

Cálculo de la Prima por el Principio del Valor Esperado

Como hemos dicho anteriormente, la prima pura o de riesgo se calculará en base a un principio de equivalencia que podemos formular matemáticamente en los siguientes términos:

$$P = \psi\{F(x, t)\}$$

donde $F(x, t)$ es la función de distribución del daño total y ψ es la función que define el principio de equivalencia. Consideramos

oportuno, puesto que anteriormente no lo hemos realizado, efectuar un breve comentario sobre el significado actuarial de la anterior ecuación matemática. El elemento fundamental de la misma es $F(x,t)$. En este sentido, lo que viene a definir la ecuación es un principio de equivalencia actuarial entre prestaciones y contraprestaciones, en el sentido de que $F(x,t)$ viene a medir, en términos estadísticos, el coste de siniestralidad para el ente asegurador, es decir, el coste de la cobertura del riesgo por parte de dicha entidad, expresando P la compensación económica de dicho coste, el "precio" por la cobertura del riesgo. Se trata, por tanto, de establecer, a través de la función ψ , un principio de equivalencia entre el coste (aleatorio) del riesgo y el precio (constante) de la cobertura del mismo, entre la prestación del servicio de seguridad por parte del ente asegurador y la contraprestación que, por tal servicio, ha de percibir. Es por ello que hablamos de prima pura o de riesgo, en el sentido de que, en la determinación de dicha componente del "precio" del seguro, hacemos intervenir únicamente el elemento "riesgo" (con o sin apelación al factor de la estabilidad del ente asegurador). A dicha prima pura se la incorporarán otras componentes del tipo económico, administrativo y comercial, que configurarán el precio a satisfacer por el asegurado, como veremos posteriormente. Pero en el principio de equivalencia que hemos formulado, el único elemento que hemos hecho intervenir ha sido el riesgo, cuya cobertura asume el asegurador. Que la medida del coste de tal riesgo la establece, en términos estadísticos, la distribución del daño total, $F(x,t)$, es algo que pensamos resulta suficientemente claro y evidente a través del análisis que de dicha distribución y del proceso de riesgo hemos efectuado en este trabajo.

Así pues, definimos la prima de riesgo mediante la relación: $P = \psi\{F(x,t)\}$. Si utilizamos como principio de equivalencia el principio del valor esperado (con nivel λ), tendremos:

$$P = (1+\lambda) E(X) = (1+\lambda) \int_0^{\infty} x \, dF(x,t) \quad (\lambda \geq 0)$$

siendo X la variante del daño total. El parámetro es el llamado recargo de seguridad, que se introduce por razones de estabilidad del ente asegurador, y cuya determinación cuantitativa co

tituye un apartado importante de la teoría del riesgo, como se tendrá ocasión de analizar posteriormente. En función de que dicho recargo vaya o no incluido implícitamente en la prima pura, se suelen distinguir dos casos: a/ Las primas puras con bases de primer orden, en las que el recargo de seguridad aparece incluido de manera implícita (como sería la prima pura P que hemos expresado en la anterior ecuación) y b/ Las primas puras con bases de segundo orden, en las que las mismas coinciden con la esperanza matemática de la siniestralidad, y a las que se incorpora posteriormente el recargo de seguridad (que aparecerá definido de manera explícita), obteniéndose las primas puras recargadas o primas puras con recargo de seguridad, es decir, $P_1 = (1+\lambda)P$, siendo $P = E(X)$.

Por tanto, la prima pura con bases de segundo orden (no recargada) vendrá definida por la relación:

$$P = E(X) = \int_0^{\infty} x \, dF(x,t)$$

que no es más que la aplicación del principio del valor esperado para $\lambda = 0$. Si analizamos las desviaciones de la siniestralidad con relación a la misma, tendremos: Sea la variante desviación $\Delta = X - P$. Se verificará:

$$E(\Delta) = E(X) - P = 0$$

$$\text{Var}(\Delta) = E(\Delta^2) = E(X - P)^2 = E(X^2) - P^2 = \text{Var}(X)$$

que será, por tanto, mínima, por corresponder a la propia dispersión de X .

Recordemos que la distribución del daño total viene definida por:

$$F(x,t) = P(X \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V(x/n)$$

donde $V(x/n)$ es la función de distribución de la cuantía del daño para n siniestros, y que en el supuesto de que las cuantías de los siniestros sean independientes del número de ellos se verificará: $V(x/n) = V^{n*}(x)$, convolución n -ésima de la cuantía del daño de un siniestro, $V(x)$, en cuyo caso tendremos:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V^{n*}(x)$$

Para este supuesto, comúnmente admitido, la prima pura (no recargada) será:

$$P = E(X) = \int_0^{\infty} x \, dF(x,t) = \int_0^{\infty} x \, d\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V^{n*}(x) \right\} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \int_0^{\infty} x \, dV^{n*}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n \alpha_1 = t \alpha_1$$

siendo

$$\alpha_1 = \int_0^{\infty} x \, dV(x), \text{ coste probable de cada siniestro, y} \\ t = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t), \text{ número probable de siniestros.}$$

Por tanto, la prima pura (no recargada) resulta ser, en este principio del valor esperado, el producto del número esperado de siniestros por el coste esperado de cada siniestro. Este es el proceso seguido en la concepción clásica de los seguros generales, donde se establecían estimadores empíricos de ambos valores probables, de la siguiente forma: Para el número probable de siniestros se definía la llamada frecuencia de siniestralidad a través de la siguiente relación:

$$f = \frac{\text{Nº de siniestros}}{\text{Nº de expuestos al riesgo}} = \frac{n}{N}$$

y se tomaba a dicho estadístico como estimador del número probable de siniestros, $t^* = f$. Como resaltamos en su momento, f no es una auténtica frecuencia relativa, pues puede ser superior a la unidad.

Así mismo, para el coste esperado de un siniestro se definía el estadístico:

$$\bar{c} = \frac{\text{Sumas pagadas por siniestros}}{\text{Nº de siniestros ocurridos}} = \frac{S}{n}$$

utilizándose dicho estadístico como estimador del coste probable de un siniestro, α_1 . De esta forma, en la concepción clásica, se efectuaba el cálculo de la prima pura o de riesgo a través de la relación:

$$P = \frac{\text{Sumas pagadas por siniestros}}{\text{Nº de expuestos al riesgo}} = \frac{S}{N} = \frac{n}{N} \cdot \frac{S}{n} = f \cdot \bar{c}$$

Es decir, se definirá la prima pura como el producto de ambos estimadores, lo que viene a ser una estimación del producto de parámetros $t \alpha_1$. Este criterio es lógico y racional, hasta que se da entrada a la componente de la estabilidad del ente asegurador, en cuyo caso es necesario el cálculo de una prima recargada, mediante la introducción de un recargo de seguridad, cuya magnitud debe ser cuantificada con criterios científicos.

Participación del Asegurado en la Cobertura del Riesgo

Vamos a analizar brevemente los casos fundamentales en los que el asegurador hace participar, o puede hacer participar al asegurado en la cobertura del riesgo objeto del seguro. Las razones por las cuales se puede dar dicho tipo de participación son, fundamentalmente, de dos clases: a/ la evitación de daños máximos al asegurador, por encima de un determinado nivel (caso del seguro a primer riesgo), y b/ el intento de evitar la indemnización de pequeños siniestros, cuyo elevado número puede hacer incrementarse, de manera anti-económica, los gastos de administración del ente asegurador (caso de los seguros con franquicia).

Las modalidades fundamentales de participación del asegurado son las siguientes:

1/ Seguro con franquicia absoluta.

Se define este seguro estableciendo, en primer lugar, una franquicia (absoluta) de magnitud A. Si se produce un siniestro de cuantía X, se procederá de la siguiente forma:

Si el daño $X \leq A$, no se indemniza dicho siniestro.

Si el daño $X > A$, se procede a indemnizar $X - A$.

De esta forma, la prima pura (no recargada) de este seguro se calculará mediante la relación:

$$P = \int_A^{\infty} (x-A) d F(x,t)$$

expresión que admite el siguiente desarrollo

$$P = \int_A^{\infty} x d F(x,t) - A \int_A^{\infty} d F(x,t) = \int_0^{\infty} x d F(x,t) - \int_0^A x d F(x,t) - A\{1-F(A,t)\} = c_1 - \int_0^A x d F(x,t) - A\{1-F(A,t)\}$$

siendo $c_1 = E(X)$ el valor probable de la distribución del daño total.

También se puede proceder, teniendo en cuenta que, en la hipótesis de independencia, $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V^{n*}(x)$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P &= \int_A^{\infty} (x-A) d\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V^{n*}(x) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \int_A^{\infty} (x-A) dV^{n*}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n \int_A^{\infty} (x-A) dV(x) = t \int_A^{\infty} (x-A) dV(x) \end{aligned}$$

que nos expresa la prima pura P en función de la distribución de la cuantía de un siniestro, $V(x)$, siendo t el número probable o medio de siniestros. A su vez, el coste medio por siniestro para el ente asegurador admitirá la siguiente descomposición:

$$\int_A^{\infty} (x-A) dV(x) = \int_A^{\infty} x dV(x) - A \int_A^{\infty} dV(x) = \alpha_1 - \int_0^A x dV(x) -$$

$$-A \{1-V(A)\}$$

siendo α_1 el valor probable de la distribución $V(x)$, $\alpha_1 = \int_0^{\infty} x dV(x)$

En el caso particular de que, por ejemplo, $V(x)$ sea una distribución logarítmico-normal con parámetros μ y σ , es decir, que:

$$V(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u - \mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

se verificará:

$$\bar{c} = \int_A^{\infty} (x-A) dV(x) = e^{\mu + \sigma^2/2} \int_A^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx -$$

$$-A \{1-V(A)\}$$

siendo

$$\begin{aligned} V(A) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^A \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln A} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - \mu}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt = \Phi \frac{\ln A - \mu}{\sigma}, \end{aligned}$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de la distribución $N(0, 1)$.

Así mismo se pueden hacer de manera inmediata, las siguientes tres transformaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^A e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln A} e^{-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}} dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu + \sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - \mu}{\sigma}} e^{-(z - \mu)^2/2} dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu + \sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\frac{\ln A - \mu - \sigma^2}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt = e^{\mu + \sigma^2/2} \phi\left(\frac{\ln A - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

De esta forma, el coste medio por siniestro para el ente asegurador adoptará, para el caso en que $V(x)$ sea lognormal con parámetros μ y σ , la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\bar{c} &= e^{\mu + \sigma^2/2} - e^{\mu + \sigma^2/2} \phi\left(\frac{\ln A - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) - A \left\{ 1 - \phi\left(\frac{\ln A - \mu}{\sigma}\right) \right\} = \\
&= e^{\mu + \sigma^2/2} \left\{ 1 - \phi\left(\frac{\ln A - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \right\} + A \left\{ \phi\left(\frac{\ln A - \mu}{\sigma}\right) - 1 \right\}
\end{aligned}$$

siendo $\phi(x)$, insistimos, la función de distribución (tabulada) de una distribución $N(0,1)$. La prima pura se calculará entonces en este seguro mediante la relación: $P = t \bar{c}$.

2/ Seguro a primer riesgo.

Se define este seguro estableciendo un nivel máximo (M) de riesgo a cargo del asegurador. Así pues, producido un siniestro de cuantía X se procederá de la siguiente forma:

Si el daño $X < M$, se indemniza enteramente.

Si el daño $X > M$, se indemniza únicamente M .

Por tanto la prima pura en este seguro será:

$$P = \int_0^M x \, dF(x,t) + M \int_M^\infty dF(x,t) = \int_0^M x \, dF(x,t) + M \{1 - F(M,t)\}$$

Desarrollando la distribución del daño total en función de las distribuciones básicas, tendremos:

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^M x \, d\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V^{n*}(x) \right\} + M \int_M^\infty d\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V^{n*}(x) \right\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n \int_0^M x \, dV(x) + M \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n \int_M^\infty dV(x) = \\
&= t \left\{ \int_0^M x \, dV(x) + M \int_M^\infty dV(x) \right\} = t \bar{c}.
\end{aligned}$$

siendo t el número probable de siniestros y \bar{c} el coste medio por siniestro para el ente asegurador. Este coste medio podrá presentarse de la siguiente forma:

$$\bar{c} = \int_0^M x dV(x) + M \int_M^\infty dV(x) = \int_0^M x dV(x) + M \{1 - V(M)\}$$

En el caso de que $V(x)$ sea una distribución logarítmico-normal con parámetros μ y σ , tendremos:

$$\bar{c} = e^{\mu + \sigma^2/2} \phi\left(\frac{\ln M - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) + M \{1 - \phi\left(\frac{\ln M - \mu}{\sigma}\right)\}$$

siendo $\phi(x)$ la función de distribución de la distribución $N(0,1)$. La prima pura de este seguro será, como se ha indicado, $P = t \bar{c}$.

3/ Seguro a primer riesgo con franquicia.

Es este seguro una combinación de los dos anteriores. Se define estableciendo una franquicia (absoluta) de magnitud A y un nivel máximo de riesgo a cargo del asegurador, de cuantía M . Por tanto, al producirse un siniestro de cuantía X , se procederá de la siguiente forma:

Si el daño $X < A$, no se indemniza cantidad alguna.

Si el daño $A < X \leq M$, se indemniza por valor de $X - A$.

Si el daño es $X > M$, se indemniza por valor de $M - A$.

La prima pura de este seguro será entonces:

$$\begin{aligned} P &= \int_A^M (x-A) dF(x,t) + (M-A) \int_M^\infty dF(x,t) = \\ &= \int_A^M x dF(x,t) + M \{1 - F(M,t)\} - A \{1 - F(A,t)\} \end{aligned}$$

o bien, desarrollando $F(x,t)$ en función de las distribuciones básicas:

$$P = t \left\{ \int_A^M (x-A) dV(x) + (M-A) \int_M^\infty dV(x) \right\} = t \bar{c}.$$

El coste medio por siniestro para el ente asegurador, \bar{c} , admitirá el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \int_A^M (x-A) dV(x) + (M-A) \int_M^\infty dV(x) = \int_A^M x dV(x) + \\ &+ M \{1 - V(M)\} - A \{1 - V(A)\} \end{aligned}$$

En el caso de que $V(x)$ sea una distribución logarítmico-normal con parámetros μ y σ , tendremos:

$$\int_A^M x dV(x) = \int_0^M x dV(x) - \int_0^A x dV(x) = e^{\mu+\sigma^2/2} \left\{ \phi\left(\frac{\ln M - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln A - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \right\}$$

y como $V(x) = \phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$, $x > 0$, siendo $\phi(x): N(0,1)$, resulta:

$$\bar{c} = e^{\mu+\sigma^2/2} \left\{ \phi\left(\frac{\ln M - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln A - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \right\} - M \phi\left(\frac{\ln M - \mu}{\sigma}\right) + A \phi\left(\frac{\ln A - \mu}{\sigma}\right) + M - A$$

A pesar de la extensión de la fórmula que acabamos de obtener, resulta de sencilla aplicación, toda vez que $\phi(x)$ es la función de distribución de la distribución $N(0,1)$, que está tabulada, por lo que el conocimiento de los parámetros μ y σ y de las constantes A y M nos conduce a la determinación de \bar{c} y, en consecuencia, de la prima de riesgo para este seguro.

4/ Seguro con franquicia relativa.

Se define este seguro estableciendo, en primer lugar, una franquicia (relativa) de magnitud A , a partir de la cual se indemnizan completamente los siniestros. De esta forma, si se produce un siniestro de cuantía X , se procederá como sigue:

Si el daño $X < A$, no se indemniza nada.

Si el daño $X \geq A$, se indemniza completamente el daño X .

La prima pura de este seguro se calculará entonces mediante la relación:

$$P = \int_A^\infty x dF(x,t) = c_1 - \int_0^A x dF(x,t)$$

siendo c_1 el valor probable de la distribución del daño total, $c_1 = E(X)$. Dicha prima pura se podrá entonces expresar, en función de las distribuciones básicas, de la siguiente forma:

$$P = t \int_A^\infty x dV(x) = t \left\{ \alpha_1 - \int_0^A x dV(x) \right\} = t \bar{c}.$$

siendo t el número probable de siniestros, α_1 el valor probable de la distribución $V(x)$ y \bar{c} el coste medio por siniestro para el ente asegurador.

Si suponemos que la distribución de la cuantía de un siniestro, $V(x)$, es lognormal con parámetros μ y σ , dado que, en este caso, se verifica:

$$\alpha_1 = e^{\mu+\sigma^2/2} \quad \text{y} \quad \int_0^A \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\mu+\sigma^2/2} \phi\left(\frac{\ln A - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)$$

siendo $\phi: N(0,1)$, el coste medio por siniestro, \bar{c} , resultará ser

$$\bar{c} = e^{\mu+\sigma^2/2} \left\{ 1 - \phi\left(\frac{\ln A - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \right\}, \text{ de sencillo cálculo.}$$

5/ Seguro con autoparticipación.

En esta modalidad, la compañía aseguradora soporta únicamente un porcentaje (tanto por uno) r del daño producido por los distintos siniestros ($0 < r < 1$), por lo que la prima pura resultará ser:

$$P = \int_0^{\infty} r x dF(x,t) = r \int_0^{\infty} x dF(x,t) = r E(X)$$

siendo $E(X)$ el valor probable de la distribución del daño total. También se podrá expresar esta prima pura, en función de las distribuciones básicas, de la siguiente forma:

$P = r t \int_0^{\infty} x dV(x) = r t \alpha_1$, siendo α_1 el valor probable de la distribución $V(x)$. En el caso en que $V(x)$ sea lognormal con parámetros μ y σ , $\alpha_1 = e^{\mu+\sigma^2/2}$, con lo que la prima pura resultará ser:

$$P = r t e^{\mu+\sigma^2/2}$$

LA PRIMA COMERCIAL Y SUS DISTINTAS COMPONENTES

Una vez obtenida la prima pura (recargada), bien sea con bases de primer orden (el recargo de seguridad aparece implícitamente incluido en la prima), bien con bases de segundo orden (donde se manifiesta, de forma explícita, el recargo de seguridad aplicado), a dicha prima de riesgo se la incorporarán los r cargos para gastos de gestión interna y externa que configurarán la prima comercial. Tal prima comercial vendrá entonces definida por la relación:

$$P'' = (1+\lambda) P + G_1 + G_2$$

onde P expresa la prima pura o de riesgo, λ el recargo de seguridad, $(1+\lambda)P$ la prima recargada, G_1 el recargo para gastos de gestión interna (administrativos) y G_2 el recargo para gastos de gestión externa (comerciales). Estos dos últimos recargos configuran las componentes económico-comerciales del precio del seguro. G_1 es la componente económica de dicho precio, que está en función de la dimensión y organización administrativa interna de la empresa aseguradora, y G_2 es la componente comercial de dicho precio (comisiones a satisfacer a los agentes), que estará en función de la organización externa de la empresa y de su política comercial.

A efectos de periodificación contable de los ingresos de primas (reservas de riesgos en curso), se define la prima de inventario de la siguiente forma:

$$P' = (1+\lambda) P + G_1$$

Si bien es frecuente que se incluyan en la prima de inventario sólo una parte de los gastos de administración G_1 . En efecto, se suele diferenciar, dentro de estos gastos, entre los llamados gastos de gestión interna de consumo inmediato y los gastos de gestión interna de consumo a lo largo del periodo del seguro, pasando a formar parte de la prima de inventario únicamente éstos últimos.

Es sumamente frecuente tomar como criterio de imputación de los costes internos y externos el que los mismos giren sobre la prima comercial, como un porcentaje de ella. De esta forma, y representado por:

g_1 = recargo para gastos de gestión interna (tanto por uno)

g_2 = recargo para gastos de gestión externa (tanto por uno)

la prima comercial vendrá definida por la relación:

$$P'' = (1+\lambda) P + g_1 P'' + g_2 P''$$

es decir:

$$P'' = \frac{(1+\lambda)P}{1-g_1-g_2}$$

siendo la prima de inventario:

$$P' = (1+\lambda) P + g_1 P'' = (1-g_2) P''.$$

Sobre las primas comerciales giran, en aquellos casos en que así está establecido, el recargo adicional, los recargos para el Fondo Nacional de Garantía y el Consorcio, así como los impuestos y tasas repercutibles. Con ello se obtiene el importe del recibo a satisfacer por el asegurado, el precio "final" del seguro.

Para profundizar en todas estas cuestiones relativas a la prima comercial, prima de inventario, etc., es interesante acudir al trabajo del Dr. Ubaldo Nieto de Alba titulado "Bases Técnicas y Reservas de Riesgo en Curso"(1).

En las modalidades de seguros generales se da con más frecuencia que en el seguro de vida la distinción entre prima inicial y primas sucesivas. La primera es la que se satisface al comienzo del contrato, y la segunda es el resultado de dar entrada a nuevos datos o experiencias, obtenidos durante el mismo. Esto nos conduce directamente al problema de cómo se establece el cálculo de primas, es decir, al problema de la tarificación en general, que pasamos a analizar a continuación.

SISTEMAS DE TARIFICACION

Como dijimos al comenzar el apartado II.5 de nuestro trabajo, por tarificación entenderemos el proceso que tiene por objeto la determinación de primas equitativas para cada riesgo, si olvidar que tales primas han de proporcionar una adecuada estabilidad a la entidad aseguradora. Los principios técnicos en que se basa la elaboración de una tarifa constituyen el sistema de tarificación correspondiente. Básicamente, se puede hablar de dos sistemas fundamentales de tarificación, que serán:

- a/ La tarificación propiamente dicha, tarificación a priori o tarificación por clases (class rating).
- b/ La tarificación a posteriori o según experiencia (experience rating).

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Bases Técnicas y Reservas de Riesgos en Curso. Riesgo y Seguro. II Trimestre. 1964.

En la tarificación a priori o por clases ("class rating", en la terminología norteamericana) se establece una agrupación de los riesgos por clases homogéneas, dentro de cada una de las cuales se procede a estimar las distribuciones básicas, y, en consecuencia, al cálculo de primas puras (por clases), mientras que en la tarificación a posteriori o según experiencia ("experience rating", en la terminología norteamericana), la tarifa originariamente establecida se va modificando de acuerdo con la nueva información que del riesgo se va disponiendo.

Siguiendo al Dr. Jesús Vegas Asensio en su trabajo "Aplicación de la teoría de la credibilidad a la tarificación de riesgos", que hemos reseñado anteriormente, dentro de la tarificación a posteriori se puede hablar de dos grandes grupos de métodos de tarificación, según el principio que en el método prevalezca:

- a/ Principio de eficacia en la tarificación (consideración individual del riesgo): Métodos Bonus-Malus, Merit-rating y Retrospective-rating.
- b/ Principio de eficacia y de estabilidad (consideración de un colectivo o grupo): Método de distribución de dividendos (Premium refund) y de participación en beneficios.

En la tarificación a posteriori o según experiencia, al contrario que en la tarificación propiamente dicha, se parte de la existencia de una prima inicial (para el individuo o el grupo) que se va modificando para dar lugar a las primas de los periodos sucesivos. No obstante, en un sentido más amplio, la expresión "experience rating" se aplica a todo problema de actualización de tarifas mediante la incorporación de la nueva información.

Así pues, los dos sistemas fundamentales de tarificación son la tarificación a priori y la tarificación a posteriori: En la primera se procede a una agrupación de los riesgos por clases homogéneas, según un criterio estadístico, para establecer a continuación las tarifas correspondientes a las distintas clases, mientras que en la tarificación según experiencia lo que se establece es, propiamente, el sistema de modificación de tarifas en

función de la información de la que en cada momento se va disponiendo, pero partiendo de unas tarifas establecidas a priori. En nuestro estudio de ambos sistemas de tarificación, comenzaremos, como es lógico, con el análisis de la tarificación propiamente dicha, dado que ésta será la que nos determine los niveles de tarifa a aplicar a los asegurados en el comienzo de la relación contractual de cobertura de riesgos, pudiéndose posteriormente modificar dichos niveles conforme tal relación se vaya desarrollando en los sucesivos ejercicios, en función de la siniestralidad real para cada asegurado. Procederemos, por tanto, al análisis de la tarificación por clases.

TARIFICACION PROPIAMENTE DICHA O POR CLASES

El sistema de tarificación propiamente dicha o "class rating" se basa en la agrupación de riesgos por clases homogéneas que permita establecer tarifas uniformes dentro de cada clase. Dentro de cada clase se procede a estimar estadísticamente el número medio de siniestros y el coste medio por siniestro, obteniéndose de esta forma la prima pura correspondiente a cada clase, que, como decimos, será uniforme para todos los elementos de la misma. ¿Cómo se establece la clasificación, que permita definir grupos homogéneos de riesgo?. Mediante la definición de los llamados factores de riesgo, que no son más que características variables fundamentales que se supone inciden de una manera fundamental en la intensidad del riesgo existente. Así, por ejemplo en el seguro de vida, es claro que un factor de riesgo (el más importante) es la edad del expuesto al riesgo (de fallecimiento). La elección de los factores de riesgo que han de incorporarse a una tarifa, en un sistema de tarificación estadística como el que analizamos, ha de hacerse, obviamente, con criterio estadístico, y por tal se suele entender: a/ Que la siniestralidad media sea diferente en las distintas clases, y b/ Que la dispersión dentro de cada clase sea mínima. Desgraciadamente, no es el criterio estadístico el que se sigue en la determinación de los factores de riesgo en muchos casos, sino que intervienen criterios ajenos a

Estadística, como expresa Nieto de Alba (1) al hablar de que "el aspecto más importante para establecer un diseño es el de la elección de las características de la tarifa. La mayoría de las veces, dicha elección se lleva a cabo, no desde el punto de vista técnico, sino por razones políticas o administrativas. Esto da lugar a que la tarificación no sea técnica, y a esa gran diversidad de tarifas. La decisión de si una característica ha de ser incorporada a la tarifa, habrá de hacerse con criterio estadístico. Es decir: a/ Teniendo en cuenta que la media de daños sea distinta en cada clase de tarifa, y b/ Que la dispersión dentro de cada clase de tarifa ha de ser mínima. Estos principios son bastante descuidados en la práctica, en especial, por los no especialistas en Estadística, que consideran la dispersión como fenómeno y no como medida de la bondad de un promedio, y que éste surge del criterio seguido en la elección de los factores de riesgo, es decir, considerar la dispersión como crítica de la elección de las características de la tarifa". A modo de ejemplo, recojamos las siguientes afirmaciones de André Thepaut, expresadas en su trabajo "Aspecto político y aspecto económico de la bonificación por no siniestro": "Desde hace algunos años, se habla mucho de política en el Seguro francés. Así, por ejemplo, con frecuencia se opone o enfrenta una tarifa "política" del seguro del automóvil a una tarifa técnica, o incluso se proyectan reformas de tipo político, a las que se denomina reformas de estructura.... la Ordenanza de 1945 constituye una manifestación explosiva del dirigismo, desde el momento que, sencillamente, permite que el Ministerio de Hacienda dirija, si así lo desea, todo el Seguro francés; puede fijar las tarifas, tanto las máximas como las mínimas, los tipos de interés de comisión y las condiciones tipo de las pólizas; debe aprobar todo acuerdo tarifario, etc."

Así pues, con gran frecuencia se interfieren razones de tipo político o administrativo a los criterios meramente estadísticos. A este respecto no conviene, sin embargo, ser excesivamente

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Presentación a diversos artículos sobre tarificación del automóvil de Thepaut, Mehrling, etc. RIS nº 5. I Trimestre, 1964. Pag. 311-320'

rígidos o inflexibles, pues las razones de tipo sociológico (más que político) pueden o incluso deben influir en la determinación de los factores de riesgo con los que trabajan. Por citar sólo un ejemplo de apoyatura a estas afirmaciones, puede resultar inconveniente en un país como España, incluir como factor de riesgo, en el seguro del automóvil, el número de kilómetros recorridos por el vehículo, por cuanto, aunque dicho factor sea sin duda importante en la configuración del riesgo, y por tanto, válido desde el punto de vista meramente estadístico, no resulta demasiado fiable en sus datos, al no ser difícil alterar el verdadero valor de dicha variable. De cualquier forma, el criterio de selección de los factores de riesgo ha de ser fundamentalmente estadístico.

Resumiendo lo que hemos venido expresando anteriormente, en el sistema de tarificación propiamente dicho se trata de formar clases homogéneas de riesgo, seleccionando (con criterio estadístico) los factores de riesgo. Dentro de cada clase, se estima el número medio de siniestros y el coste medio por siniestro obteniendo por producto de ambos parámetros la prima pura correspondiente a cada clase homogénea. Como expresa Jesús Vegas Asensio en el trabajo anteriormente reseñado, "en la tarificación "class rating", los diversos tipos de prima se aplican uniformemente a cada unidad de expuestos al riesgo, de acuerdo con el grupo o clase a que pertenezca dicha unidad. Estos grupos se elaboran de manera que sea posible obtener un conocimiento estadístico de su siniestralidad, de forma que se puede comparar la siniestralidad media real de un grupo con la prima que le corresponde, prima que será idéntica para todos los expuestos al riesgo que integran el citado grupo. Los ramos en que tiene mayor aplicación este sistema, en la práctica de la mayoría de los países, son los de vida, accidentes de trabajo, responsabilidad civil, automóvil e incendios. Por ejemplo, en el seguro del automóvil en España, existen dos factores de riesgo, la categoría y clase del vehículo (potencia, tonelaje, etc.) y el uso a que se destina; combinando ambos factores de riesgo, se obtienen los distintos grupos en que está estructurada la tarifa. En el seguro de vida, los factores considerados son la edad y el sexo, y las probabilidades y tantos biométricos están obtenidos en función de ambos atributos"

Con la finalidad de simplificar la presentación de la tarifa, se sigue con frecuencia la técnica de elaborar una prima base para todos los riesgos de una primera clasificación (por ejemplo, categoría del vehículo en el caso del seguro del automóvil), procediéndose, posteriormente, a obtener la prima de las restantes subclases por medio de correcciones (recargos y deducciones) de la prima base (por ejemplo, según el uso o la profesión en el seguro del automóvil). Así, por ejemplo, en las tarifas vigentes del Seguro Voluntario de Automóviles en España, en la Modalidad primera de Responsabilidad Civil Suplementaria, la prima base se establece teniendo en cuenta: a/ La clase del vehículo, si se trata de los incluidos en la Categoría Primera (en la que están comprendidos los vehículos de turismo y vehículos comerciales de cuatro o más ruedas, siempre que su peso total, incluida la carga útil, sea igual o inferior a 3,500 Kg.), o bien, b/ otras características (tonelaje, viajeros transportados, dedicación preferente a explotaciones agrícolas o potencia), si se trata de vehículos incluidos en las Categorías Segunda (camiones y vehículos industriales cuyo peso total, incluyendo la carga útil, sea superior a 3.500 Kg.) o Tercera (vehículos de motor de dos o tres ruedas, es decir, motocicletas, etc.). A partir de dicha prima base, se introducen factores de corrección (recargos o bonificaciones), según el uso a que se destine el vehículo. También se aplican a las Categorías Primera y Tercera recargos por edad del conductor y antigüedad del carnet de conducir, que en concreto ascienden a las siguientes cunatías: a/ Conductor menor de 27 años y antigüedad del carnet inferior a dos años: recargo del 40% sobre la prima correspondiente; b/ Una de las dos circunstancias, recargo del 20%. También, por ejemplo, referido al mismo seguro del automóvil, y según expresa Ubaldo Nieto de Alba en su trabajo de presentación a varios artículos que anteriormente hemos reseñado, la mayoría de las entidades aseguradoras suecas procedieron a ajustar el 10 de Marzo de 1961 su sistema de tarifas al tener más en cuenta y dar un mayor valor al punto de vista técnico. Mientras que la anterior tarifa distinguía únicamente entre el tipo de vehículo y el distrito, recibiendo una bonificación del 20% los abstenios de bebidas alcohólicas, a partir de dicha fecha se introdujeron

los siguientes factores de riesgo: Tipo de vehículo, distrito, potencia del motor, número de kilómetros recorridos al año y experiencia del conductor. Si el recorrido anual es inferior a los 10.000 Km., se efectúa una rebaja, y si sobrepasa los 25.000 K., se aplica un complemento. Respecto a la experiencia del conductor se procedió a aplicar la siguiente regla: Personas mayores de 25 años, o con más de tres años disfrutando de permiso de conducir, reciben una bonificación del 25%.

Por poner un ejemplo práctico en el que se manifiesten todos estos conceptos, tomemos el que presentó Nieto de Alba (1), referido a la tarifa española del Seguro Obligatorio del Automóvil. Consideremos la siguiente clase de vehículos: Camiones (categoría Segunda) destinados al transporte público (primer factor de agravación) de pescado fresco (segundo factor de agravación). El modelo de siniestralidad vendrá definido por la variante $\eta = \xi + \xi_1 + \xi_2$, donde ξ es la variante asociada a todos los vehículos de la 2ª categoría (camiones del mismo tonelaje) que se destinen al transporte público y ξ_2 es la variante asociada a todos los vehículos de 2ª categoría (camiones del mismo tonelaje) que se destinen al transporte de pescado fresco. La prima pura vendrá definida por:

$$P = E(\eta) = E(\xi) + E(\xi_1) + E(\xi_2)$$

y la prima comercial (siendo g el total de recargos de gestión, en tanto por uno) será:

$$P'' = \frac{P}{1-g} = \frac{E(\xi)}{1-g} + \frac{E(\xi_1)}{1-g} + \frac{E(\xi_2)}{1-g} = p_b + R_1 + R_2,$$

siendo p_b la prima base, R_1 un recargo por uso (transporte público) y R_2 otro recargo por uso (transporte de pescado fresco. Estos recargos se pueden poner en relación con la prima base, definiendo los siguientes porcentajes de recargo: $r_1 = (R_1/p_b)100$; $r_2 = (R_2/p_b)100$.

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Apuntes de Matemática Actuarial. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Madrid, 1970

Un problema importante que vamos a plantear en nuestro análisis de la tarificación por clases es el de la precisión estadística de la tarifa. Como dice Ubaldo Nieto, "las subdivisiones y clasificaciones excesivas pueden dar lugar a pérdidas de precisión estadística de la tarifa. Este es un principio muy descuidado por los prácticos en tarificación de riesgos". Recordemos en este sentido, que cuando hablamos del problema de la homogeneidad de riesgos y de la formación de clases homogéneas de riesgos, en nuestra presentación de las distribuciones básicas del proceso de riesgo, presentamos los resultados de un trabajo de Delaporte sobre tarificación en el seguro del automóvil, resultados que correspondían a la siguiente descomposición de la varianza por factores de riesgo considerados:

<u>Parte de la varianza debida a</u>	<u>Varianza</u>	<u>%</u>
Zona de garage habitual	0,0304	6,5
Uso y profesión	0,0092	2,0
Potencia del motor	0,0015	0,3
Tipo y conductor	0,0059	1,2
Otras causas	0,4254	90,0
Total.....	0,4724	100,0

De estos datos se deduce que, si bien la zona de garage habitual del vehículo aún explica el 6,5% de la varianza (lo que, por otra parte, no es mucho), los otros factores son de una importancia muy escasa y no representan en total ni siquiera el 10% de la varianza total. Queda por explicar el 90% de dicha varianza. Todo ello pone de manifiesto la heterogeneidad en el acaecimiento de los accidentes por parte de los automóviles de una misma clase de tarifa de seguro, es decir, de los vehículos que pertenecen todos a la misma zona de garage habitual, el mismo uso, la misma potencia fiscal y el mismo modelo. De todos los factores de riesgo considerados, el único con alguna diferencia específica en el riesgo total es la zona de garage habitual, y, a lo sumo, el uso y profesión. Toda consideración de factores como la potencia del motor y el tipo y constructor del vehículo no hace sino fragmentar la información, con la importancia estadística que tal proceso de fragmentación tiene, sin que por otra

parte, al menos por la información obtenida, tales factores influyan de manera significativa en el proceso de siniestralidad analizado. Sobre este mismo tema se expresa Jesús Vegas Asensio, en su mencionado trabajo "Aplicación de la teoría de la credibilidad a la tarificación de riesgos" de la siguiente forma: "con frecuencia, se presenta el problema, a la hora de determinar la prima de riesgo que corresponde a cada grupo de tarificación, de que, debido al gran número de clasificaciones y subclasificaciones de la tarifa, la siniestralidad observada se refiere a grupo con muy escaso número de expuestos al riesgo, por lo que, desde el punto de vista estadístico, esta información es insuficiente para la obtención de las correspondientes primas de riesgo. En estos casos, podemos aplicar el método denominado "loss ratio" (razón de siniestralidad), que consiste básicamente en comparar la siniestralidad real observada de la tarifa con el valor esperado de la misma. Supongamos que tenemos una clase homogénea A compuesta por N expuestos al riesgo, de cuya observación inicial durante un año se han producido n_0 siniestros por una cuantía total de c_0 pesetas. La prima anual de riesgo para las unidades de riesgo de la clase A será: $p_0(A) = c_0/N$ (o bien, número medio de siniestros por coste medio). Si N es demasiado pequeño, o se considera que la observación inicial ha abarcado un periodo demasiado corto de tiempo, entonces podemos rectificar esta prima multiplicándola por el ratio $\Sigma c_1^i / \Sigma c_0^i$, donde Σc_1^i es el coste total de la siniestralidad de una subcartera Ω , tal que $A \subset \Omega$, en un nuevo año de observación, y Σc_0^i tiene la misma significación pero referida al año de observación inicial. De esta forma, podemos poner (en la hipótesis de que no varien los expuestos al riesgo de un año para otro).

$$P_1(A) = P_0(A) \frac{\Sigma c_1^i}{\Sigma c_0^i}$$

siendo $P_1(A)$ la nueva prima a aplicar en las unidades componente de la clase A.

El método "loss ratio" es, realmente, pues, un sistema "experience rating" más que un sistema "class rating".

Un problema importante que ha de plantearse al analizar los sistemas de tarificación es el de la modificación de los supuestos en que se ha basado una tarificación inicialmente establecida: Como dijimos en su momento, este tema lo englobamos bajo la denominación de "experience rating". Para Carlson (1), la tarificación abarca dos operaciones fundamentales: (1) la determinación de clases de riesgo, con la estimación de las distribuciones en ellas; (2) el desarrollo de planes para la modificación de las clases y distribuciones en las mismas para aquellos riesgos individuales lo suficientemente grandes como para que la desviación de la experiencia de riesgos respecto a las clases existentes sea significativa.

Para el establecimiento de las clases de riesgo y distribuciones, en las mismas, propone Carlson basarse fundamentalmente en el análisis anual de una serie de porcentajes, que podrían ser los siguientes:

Razón de siniestralidad (loss ratio) = Montante de pérdidas/primas.

Coste medio por siniestro = Montante de pérdidas/ nº de siniestros.

Frecuencia de siniestralidad = Nº de siniestros/Exposiciones al riesgo.

Prima pura = Montante de pérdidas/Exposiciones al riesgo = Coste medio por siniestro x frecuencia de siniestralidad.

Como puede observarse, está esta modelización propuesta por Carlson en línea con los análisis que se han venido realizando.

Relacionado con este problema de la modificación de las tarifas está el tema del periodo de vigencia de las mismas, pues es al finalizar dicho periodo cuando se presenta el problema de su modificación. Nos planteamos, pues, el tema de la "fiabilidad" del sistema de tarifas, en el sentido que a dicho concepto da el

(1) Carlson, Thomas O.: Observations on Casualty Insurance Ratemarking Theory in the United States. Transactions of the 17 th International Congress of Actuaries. Londres-Edinburgo, 1963. Vol. III, Part. 2. Pag. 541-559

profesor Angel Vegas Pérez (1), quien define la "fiabilidad" como "la probabilidad de que un sistema funcione de forma correcta durante un cierto tiempo y en adecuadas condiciones de utilización . Se trata, pues, de una probabilidad de supervivencia, en cierto modo". Como dice Carlson, en el trabajo que anteriormente hemos reseñado, "el objetivo primordial de la tarificación en Estados Unidos ha sido siempre el establecimiento de tarifas que sean apropiadas para el periodo durante el cual se han programado". Se plantea, pues, como un objetivo básico de la tarificación no sólo el establecimiento de las tarifas adecuadas, sino también el análisis de su periodo de vigencia, con el establecimiento de los modelos que de manera adecuada nos indiquen cuándo tal periodo ha sido superado, es decir, cuándo las tarifas han dejado de medir, de manera fiable, los riesgos asegurados.

Afirma Carlson que "un importante objetivo secundario es el establecimiento en los procesos de tarificación del equilibrio "óptimo" entre los principios de: (1) estabilidad en los niveles de tarifas, y (2) sensibilidad a la información y experiencia estadística, siempre que esté probada la consistencia de la misma. Estos dos objetivos de estabilidad y sensibilidad a la información están entrelazados a lo largo de todo el desarrollo de la ciencia actuarial, de tal forma que los procedimientos actuariales sólo pueden ser entendidos desde la perspectiva de estos dos objetivos'

Ya que estamos hablando de objetivos de la tarificación, bueno será que reseñemos los requisitos que para todo proceso de tarificación establece Green en su obra "Riesgos y Seguro" (2)'

(1) Vegas Pérez, Angel: Aplicaciones Actuariales de las Teorías de la "Fiabilidad" y de la "Credibilidad". Memorias del 18º Congreso Internacional de Actuarios. Munich, Junio 1968. Volumen 4. Pag. 727-730. Anales del Instituto de Actuarios Españoles Nº 8. 1968

(2) Green, Mark R.: Riesgo y Seguro. Ed. Mapfre, 1974. Pag. 860.

Según Green, todo proceso de tarificación debe cumplir los siguientes cuatro requisitos:

- 1/ No debe ser excesiva, sino suficiente para cubrir el peso de las pérdidas.
- 2/ Debe distribuir el peso de las pérdidas entre los asegurados en forma equitativa.
- 3/ Debe revisarse periódicamente para reflejar, en el grado que sea posible, el ritmo de las pérdidas.
- 4/ Debe estimular, si es posible, las medidas de prevención de pérdidas de los asegurados.

Como se ha manifestado de una manera evidente a lo largo de todo el estudio que hemos venido realizando, el problema más importante que surge en el proceso de tarificación propiamente dicha es el relativo a la agrupación de riesgos por clases homogéneas. Siguiendo a Bühlmann (1), para explicar lo que actualmente se entiende por homogeneidad, consideremos el siguiente conjunto ordenado de variables aleatorias:

$$\begin{array}{l} x_{11} \ x_{12} \dots x_{1n} \\ x_{21} \ x_{22} \dots x_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ x_{m1} \ x_{m2} \dots x_{mn} \end{array}$$

donde x_{ij} representa la cuantía del siniestro producido por el riesgo i en el ejercicio j . Se trata de una clase de riesgos considerada durante n años. Se dirá que esta clase es homogénea en masa de riesgos si $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}$ se distribuyen idénticamente para todo j . Cada riesgo individual se dirá homogéneo en el tiempo si las variantes $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ tienen la misma distribución para i constante.

(1) Bühlmann, Hans: Experience Rating and Credibility. Astin Colloquium 1965. Lucerne. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. III. Julio, 1967. Pag. 199-207.

Posteriormente, Bühlmann ha presentado al coloquio Astin de 1966 en Arnhem otro trabajo con el mismo título: "Experience Rating and Credibility", publicado en The Astin Bulletin. Vol. V, Part. II. Mayo, 1969. Pag. 157-168. En nuestra cita, nos referimos al primer trabajo.

La mayoría de los trabajos actuariales han estado dedicados al tratamiento de la homogeneidad en masa de riesgos, pero admitiendo, generalmente, que se verificaba la homogeneidad en tiempo. Es sin duda de gran interés profundizar en la investigación de dicha homogeneidad en el tiempo, poniendo en tela de juicio la hipótesis en la que se han basado ese amplio porcentaje de trabajos que se han ocupado del tema de la homogeneidad del riesgo.

Otro autor que ha tratado en profundidad el tema de la heterogeneidad de riesgos y su influencia en el cálculo de primas, referido a los seguros no-vida, ha sido el sueco Ulf Grenander (1). Como indica en la presentación de su trabajo, "se trata de analizar los problemas que surgen en el seguro no-vida cuando se sabe, o al menos se sospecha, que la estructura del riesgo del colectivo es heterogénea". ¿Cómo definir y cuantificar esa heterogeneidad? Mediante la distribución de riesgo, que establece Grenander en los siguientes términos:

Consideremos un colectivo asegurado, constituido por n pólizas del mismo tipo. El número de pólizas con k siniestros será representado por n_k , verificándose que: $n_0 + n_1 + n_2 + \dots = n$. El período de observación no tiene porqué ser forzosamente el mismo para todas las pólizas, si bien es aconsejable que así sea.

Si para cada póliza dada de un gran conjunto de ellas, el número de siniestros k es una variable de Poisson con valor probable λ , y si este parámetro λ adopta distintos valores para los diferentes elementos del conjunto, entonces podemos caracterizar la heterogeneidad por medio de la distribución del riesgo de λ . Podemos, por ejemplo, definir la función de distribución: $G(u) = P(\lambda \leq u)$, y en el caso de continuidad de la misma, la función de densidad: $g(\lambda) = G'(\lambda)$. La variante v , correspondiente al número de siniestros, se distribuirá de acuerdo con el modelo:

$$P_k = P(v=k) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dG(\lambda)$$

(1) Grenander, Ulf: On Heterogeneity in Now-life Insurance. Skand. Aktuar. 1957. Par. I: Pag. 71-84. Part. II: Pag. 153-179

que es la conocida distribución de Poisson compuesta. Grenander procede a la estimación del parámetro de riesgo λ , llegando al estimador bayesiano:

$$\lambda_B^* = \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{k+1} d(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^k d G(\lambda)}$$

Por ejemplo, en el caso de que λ se distribuya conforme a una ley gamma de parámetros p y a ,

$$g(\lambda) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \lambda^{p-1} e^{-\lambda a}$$

el estimador de Bayes será:

$$\lambda_B^* = (p+k)/(1+a)$$

Por último, Grenander, para medir la heterogeneidad, utiliza los estimadores de la media y la varianza de la distribución de riesgos. Para ello, utiliza los métodos clásicos de estimación: Máxima verosimilitud, mínimos cuadrados, etc.

Otros muchos autores han prestado atención especial a este problema de la homogeneidad de riesgos, pero entre ellos cabe destacar las aportaciones de Bertil Almer y Carl Philipson, quienes lo tratan dentro de una teoría más general y mediante el análisis del factor. A las aportaciones de Almer ya nos hemos referido con anterioridad, en concreto a su trabajo "Risk Analysis in Theory and practical Statistics", con análisis del desarrollo propuesto en el mismo, que hemos recogido bajo el epígrafe de "Modelo de Almer", en nuestro estudio de la distribución del daño total, pues se recordará que uno de los objetivos fundamentales de dicho modelo era llegar a la determinación simplificada de dicha distribución fundamental. Refirámonos brevemente a las aportaciones de Philipson, en concreto a las recogidas en su trabajo "Abstracts for a lecture on problems involved in motor insurance"(1).

(1) Philipson, Carl: Abstracts for a lecture on problems involved in motor insurance. Comptes rendus du XVI^e Congrès International d'Actuaries. Bruselas, 1960. Vol. III, Pag. 195-204.

Para el seguro del automóvil, propone Philipson la siguiente modelización:

Argumentos de riesgo:

- a/ Propiedades de la carretera.
- b/ Propiedades del conductor.
- c/ Propiedades del vehículo.
- d/ Tiempo (clima, valor en dinero, intensidad del tráfico.

También los argumentos a/ y c/ dependen del tiempo.

Vector de argumentos:

La medida de todo argumento que influya sobre el riesgo $1, 2, \dots, k$, se denotará por $z^{(r)}$, $r = 1, 2, \dots, k$, y el vector k -dimensional: $\mathbf{z} = (z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(k)})$ es el vector de argumentos.

Vector del factor riesgo:

Sea $\omega_{\eta}^{(r)} = \omega_{\eta}^{(r)}(z^{(r)})$ independiente de $z^{(s)}$, ($s \neq r$), donde $\omega = p$ se refiere a la distribución del número de siniestros y, $\omega = \psi$ se refiere a la distribución de las indemnizaciones.

El vector k -dimensional $\omega_{\eta} = (\omega_{\eta}^{(1)}, \omega_{\eta}^{(2)}, \dots, \omega_{\eta}^{(k)})$ se denomina vector del factor riesgo para ω . Se supone que existe una correspondencia biunívoca entre cada punto del espacio \mathbf{z} y η del espacio .

Medidas de riesgo:

La probabilidad de siniestro y la distribución de siniestros constituyen procesos con el vector argumento como vectores parámetros. Por sustitución de los vectores de factor de riesgo por los vectores parámetros se puede escribir:

$P = P_p(\eta)$ para la probabilidad de siniestros.

$\psi(x) = \psi(x, \psi_{\eta})$ para la distribución de siniestros.

Análisis del factor:

Estimación de P y $\psi(x)$ basada en hipótesis con respecto a la forma de dependencia en p_{η}, ψ_{η} respectivamente.

Seguidamente define el espacio de los elementos de riesgo y sigue un tratamiento de los problemas en una línea muy similar a la de Almer. Philipson ha presentado un estudio más elaborado de este teoría en su trabajo "On the Risk Theory of Motor Insuran

ce" (Skand. Aktuar. 1964. Häft. 1-2. Pag. 53-66). Ello supone un tratamiento más riguroso de los elementos de riesgo y su conexión con los siniestros.

Con esto acabamos el tema referido a la tarificación propiamente dicha o por clases. Puesto que hemos indicado que un elemento fundamental de la misma es el establecimiento de los factores de riesgo, y, en general, el problema de la homogeneidad de riesgos, parece oportuno y necesario, antes de pasar al tema de la tarificación a posteriori o "experience rating", proceder a un análisis, relativamente profundo, del modelo que permite establecer estadísticamente los factores sustantivos en el riesgo, es decir, el análisis del factor. A dicho estudio procederemos a continuación en el siguiente epígrafe de nuestro trabajo.

III.2.- ANALISIS FACTORIAL

El análisis factorial tiene por objeto analizar las categorías de influencia de los llamados factores (inputs, en la terminología anglosajona) en la botención del producto (output, en dicha terminología).

El modelo metodológico, utilizado con notable éxito por el profesor R. Fisher en sus investigaciones de carácter agronómico, es el conocido en la terminología estadística por "Análisis de la varianza". El método se apoya en la siguiente identidad

$$S_x^2 = S_u^2 + S_v^2 + S_{uv}^2$$

donde u y v son los factores de,:::x el producto y S_x^2 , S_u^2 y S_v^2 son las sumas de los cuadrados de las desviaciones respecto a sus medias (\bar{x} , \bar{u} y \bar{v}), siendo S_{uv}^2 la medida de la influencia en el producto de los factores no explicitados en el modelo.

Hemos considerado oportuno, a efectos inferenciales, plantear el problema con mayor amplitud que en la metodología tradicional, siguiendo el planteamiento de Wilks (1) con alguna aportación del profesor Dr. Angel Vegas Pérez. En este sentido, distinguiremos dos casos fundamentales:

a/ Caso en que las variables muestrales procedentes de poblaciones infinitas, u_1, u_2, \dots, u_r y v_1, v_2, \dots, v_s corresponden a r y s niveles perfectamente definidos a priori.

b/ Caso en que los r y s niveles sean, a su vez, muestras aleatorias de poblaciones de R y S niveles, respectivamente. Es claro que, en este caso, tendremos una aleatoriedad compuesta, ya que hemos de tener en cuenta que la muestra procederá de dos poblaciones, la de los niveles y la de las u_i y v_j en cada uno de ellos.

La metodología apropiada para el caso a/ se apoya en el análisis de regresión, mientras que la correspondiente al caso b/ en el análisis tradicional de la varianza, que se sustenta en la mencionada descomposición de la varianza del producto.

(1) Wilks, Samuel S.: Mathematical Statistics. John Wiley and Sons. 1962.

Una vez presentado en sus líneas fundamentales, el modelo en el que se basa la tarificación estadística a priori "class rating", procederemos a su desarrollo, no excesivamente pormenorizado, por cuanto ello excedería del marco estructural de este trabajo (al caer de lleno dentro del campo de la estadística matemática), pero sí con la suficiente detención que nos permita apreciar sus posibilidades de aplicación al ámbito de la tarificación de riesgos.

Sean dos variantes \underline{u} y \underline{v} estocásticamente independientes entre sí, cuyas f-nciones de distribución son, respectivamente, $F_u(u)$ y $F_v(v)$, y sea una función aleatoria de ellas $x(u,v)$. Sean

$$\begin{aligned}\mu &= E \{x(u,v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u,v) d F_u(u) d F_v(v) \\ \mu_u &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u,v) d F_v(v) \\ \mu_v &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u,v) d F_u(u)\end{aligned}$$

Sean β_u , β_v y β_{uv} las variables aleatorias definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\beta_u &= \mu_u - \mu \\ \beta_v &= \mu_v - \mu \\ \beta_{uv} &= x(u,v) - \mu_u - \mu_v + \mu\end{aligned}$$

Evidentemente, el valor probable de cada una de dichas variables aleatorias es nulo, $E(\beta_u) = E(\beta_v) = E(\beta_{uv}) = 0$, y, así mismo, la covarianza de cada par de ellas es nula, $cov(\beta_u, \beta_v) = cov(\beta_u, \beta_{uv}) = cov(\beta_v, \beta_{uv}) = 0$. De ello se deduce la expresión del producto,

$$x(u,v) = \mu + \beta_u + \beta_v + \beta_{uv}$$

y, al ser la covarianzas nulas,

$$\sigma^2(x(u,v)) = \sigma^2(\beta_u) + \sigma^2(\beta_v) + \sigma^2(\beta_{uv})$$

Estos resultados constituyen el conocido "teorema de descomposición de la varianza", que permite cuantificar la importancia que en el producto o "output" $x(u,v)$ tienen los factores o "inputs" \underline{u} y \underline{v} . Como puede observarse, la varianza, del producto

es igual a la suma de las varianzas de los factores más la llamada varianza residual. Esta es la causa por la que a este análisis se lo conoce como "análisis de la varianza".

El problema estadístico consistirá en la estimación de μ_u y μ_v . La información estadística vendrá dada por valores muestrales de $x(u,v)$ según el siguiente esquema: Supongamos que el factor u puede presentarse en los r niveles u_1, u_2, \dots, u_r , y que el factor v en los s niveles v_1, v_2, \dots, v_s . El conjunto de valores $x(u_i, v_j)$ es la muestra del "output" correspondiente a los "inputs" u_i, v_j . En definitiva, la información muestral vendrá expresada en la matriz $X = \{x(u_i, v_j); i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s\}$ cuya función de distribución será:

$$\prod_{i=1}^r F_u(u_i) \prod_{j=1}^s F_v(v_j)$$

A dicha matriz X , que es una matriz de orden rxs , se la suele denominar matriz aleatoria de segundo orden.

A efectos de simplicidad, utilicemos la siguiente terminología:

$$x_{ij} = x(u_i, v_j)$$

$$x'_{ij} = x_{ij} - \mu$$

$$\bar{x}_{..} = \sum_{i,j} x_{ij} / rs$$

$$\bar{x}_{i.} = \sum_j x_{ij} / s$$

$$\bar{x}_{.j} = \sum_i x_{ij} / r$$

donde $i = 1, 2, \dots, r$ y $j = 1, 2, \dots, s$.

Para cada par (i, j) se verifica:

$$x_{ij} = \mu + \beta_{i.} + \beta_{.j} + \beta_{ij}$$

Sea:

$$S_T^2 = \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$$

$$S_T^2 = \sum_{i,j} (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2$$

$$S_v^2 = \sum_{i,j} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2$$

$$S_{uv}^2 = \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2$$

Se verificará la relación:

$$S_T^2 = S_u^2 + S_v^2 + S_{uv}^2$$

Dado que: $E(x_{ij}) = \mu$, $i = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, s$, es evidente que se verifica:

$$E(\bar{x}..) = \mu$$

En la determinación de los valores probables de las sumas de cuadrados S_T^2 , S_u^2 , S_v^2 y S_{uv}^2 , nos encontramos en cada caso con que el valor probable puede ser expresado como una función lineal cuyos términos son de uno de los siguientes cuatro tipos:

$$\begin{aligned} E(x'_{ij} x'_{i'j'}) &= \sigma_{uv}^2 + \sigma_u^2 + \sigma_v^2 && \text{si } i = i', j = j' \\ &= \sigma_u^2 && i = i', j \neq j' \\ &= \sigma_v^2 && i \neq i', j = j' \\ &= 0 && i \neq i', j \neq j' \end{aligned}$$

Mediante sencillos desarrollos, se obtiene:

$$E(S_u^2) = s(r-1) \sigma_u^2 + \left(\frac{\sigma_{uv}^2}{s} \right)$$

$$E(S_v^2) = r(s-1) \sigma_v^2 + \left(\frac{\sigma_{uv}^2}{r} \right)$$

$$E(S_{uv}^2) = (r-1)(s-1) \sigma_{uv}^2$$

pudiendo ser obtenido $E(S_T^2)$ mediante la relación:

$$E(S_T^2) = E(S_u^2) + E(S_v^2) + E(S_{uv}^2)$$

Análogamente la varianza de $\bar{x}..$ es una función lineal de los cuatro tipos de valores probables anteriormente mencionados, que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sigma^2(\bar{x}..) = \frac{\sigma_u^2}{r} + \frac{\sigma_v^2}{s} + \frac{\sigma_{uv}^2}{rs}$$

Las anteriores relaciones nos permiten formular las siguiente expresión, que hace corresponder los valores probables de las sumas de desviaciones cuadráticas S_u^2 , S_v^2 y S_{uv}^2 , con σ_u^2 , σ_v^2 y σ_{uv}^2 , de la siguiente forma:

$$E \begin{pmatrix} S_u^2 \\ S_v^2 \\ S_{uv}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(r-1) & 0 & r-1 \\ 0 & r(s-1) & s-1 \\ 0 & 0 & (r-1)(s-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \\ \sigma_v^2 \\ \sigma_{uv}^2 \end{pmatrix}$$

Sin más que invertir esta ecuación matricial, obtenemos:

$$E^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \\ \sigma_v^2 \\ \sigma_{uv}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(r-1) & r(s-1) & r-1 \\ 0 & 0 & s-1 \\ 0 & 0 & r(-1)(s-1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_u^2 \\ S_v^2 \\ S_{uv}^2 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$E^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \\ \sigma_v^2 \\ \sigma_{uv}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s(r-1) & 0 & -1/s(r-1)(s-1) \\ 0 & 1/r(s-1) & -1/r(s-1)^2 \\ 0 & 0 & 1/(r-1)(s-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_u^2 \\ S_v^2 \\ S_{uv}^2 \end{pmatrix}$$

De aquí se deduce que las estimaciones centradas de σ_u^2 , σ_v^2 y σ_{uv}^2 serán las siguientes:

$$\sigma_u^{2*} = \frac{1}{s(r-1)} \left\{ S_u^2 - \frac{S_{uv}^2}{s-1} \right\} \quad \text{con } E(\sigma_u^{2*}) = \sigma_u^2$$

$$\sigma_v^{2*} = \frac{1}{r(s-1)} \left\{ S_v^2 - \frac{S_{uv}^2}{r-1} \right\} \quad \text{con } E(\sigma_v^{2*}) = \sigma_v^2$$

$$\sigma_{uv}^{2*} = S_{uv}^2 / (r-1)(s-1) \quad \text{con } E(\sigma_{uv}^{2*}) = \sigma_{uv}^2$$

verificándose la descomposición:

$$\sigma_T^{2*} = \sigma_u^{2*} + \sigma_v^{2*} + \sigma_{uv}^{2*}.$$

Consideremos la muestra $x(u_i, v_j) = x_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$, del producto x correspondiente a los factores u_i , v_j , definida por la matriz muestral $\{x_{ij}; i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s\}$, como un conjunto de rs variables aleatorias independientes con igual varianza, σ^2 , y con valor probable:

$$E(x(u_i, v_j)) = \mu + \beta_{ui} + \beta_{vj}. \quad (i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, s)$$

verificándose

$$\sum_{i=1}^r u_i = \sum_{j=1}^s \beta_{vj} = 0.$$

Como hemos dicho, suponemos que: $\text{Var}\{X(u_i, v_j)\} = \sigma^2$, i, j . Tal como se ha definido, $E\{x(u_i, v_j)\}$ es una función lineal con $r+s-1$ coeficientes de regresión, β_{ui} , β_{vj} . El modelo puede ser dispuesto en forma de matriz rectangular con r filas y s columnas, las r filas asociadas a las r niveles de categorías u_1, u_2, \dots, u_r del factor u (con r especificado a priori) y las s columnas asociadas a los s prefijados niveles o categorías v_1, v_2, \dots, v_s del factor v . Entonces, $x(u_i, v_j)$ es la función aleatoria que expresa la respuesta (output) correspondiente a los inputs u_i, v_j de los factores $\sigma^2(m) = \sigma^2/rs$; $\sigma^2(m_{i.}) = (r-1)\sigma^2/rs$ y $\sigma^2(m_{.j}) = (s-1)\sigma^2/rs$, sometidas a las restricciones: $\sum_i m_{i.} = \sum_j m_{.j} = 0$. Además, S_{uv}^2/σ^2 , $S_u^2(\beta_{ui})/\sigma^2$, $S_v^2(\beta_{vj})/\sigma^2$ y $S_{oo}^2(\mu)/\sigma^2$ serán variables aleatorias independientes, con distribuciones χ^2 de Pearson con $(r-1)(s-1)$, $r-1$, $s-1$ y 1 grados de libertad, respectivamente, es decir:

$$S_{uv}^2/\sigma^2 = \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$

$$S_u^2(\beta_{ui})/\sigma^2 = \chi^2_{r-1}$$

$$S_v^2(\beta_{vj})/\sigma^2 = \chi^2_{s-1}$$

$$S^2(\beta)/\sigma^2 = \chi^2_1$$

La última parte de este teorema nos permite, mediante la utilización de la distribución t de Student, establecer intervalos de confianza para los parámetros μ ; $\beta_{u_1}, \dots, \beta_{u_r}$; $\beta_{v_1}, \dots, \beta_{v_s}$. Tales intervalos, de tamaño γ , serán:

$$\begin{aligned} \text{Para } \mu: \quad m &\pm t_{(r-1)(s-1), \gamma} \sqrt{\frac{S_{uv}^2}{rs(r-1)(s-1)}} \\ " \quad \beta_{ui}: \quad m_{i.} &\pm t_{(r-1)(s-1), \gamma} \sqrt{\frac{S_{uv}^2}{rs(s-1)}} \\ " \quad \beta_{vj}: \quad m_{.j} &\pm t_{(r-1)(s-1), \gamma} \sqrt{\frac{S_{uv}^2}{rs(r-1)}} \end{aligned}$$

Así mismo, es posible, establecer regiones de confianza para la estimación simultánea de dos o más parámetros. El caso más importante, a nuestros efectos, es el de la estimación simultánea de los β_{ui} (o de los β_{vj}). Este caso es, para nuestro es-

tudio el de mayor interés por cuando, en el análisis del factor, nos interesa contrastar la hipótesis de que todos los β_{ui} (o todos los β_{vj}) son nulos, en cuyo caso afirmaríamos que la influencia del factor u (o la del factor v) en el producto x es nula. Planteemos entonces este caso, de la mayor transcendencia en nuestro análisis.

Se trata de estimar simultáneamente los parámetros β_{ui} . El teorema que anteriormente formulamos establecía, entre otras cosas, que, en el supuesto de normalidad, $S_u^2(\beta_{ui})/\sigma^2$ y S_{uv}^2/σ^2 eran variantes independientes, con distribuciones χ_{r-1}^2 y $\chi_{(r-1)(s-1)}^2$, respectivamente, de donde:

$$\frac{(s-1)S_u^2(\beta_{ui})}{S_{uv}^2} = F_{(r-1), (r-1)(s-1)}$$

es decir, el cociente $(s-1)S_u^2(\beta_{ui})/S_{uv}^2$ se distribuirá como una F de Snedecor con r-1 y (r-1)(s-1) grados de libertad. De esta forma, al tamaño γ , se tendrá:

$$P \left(\frac{(s-1)S_u^2(\beta_{ui})}{S_{uv}^2} < F_{(r-1)(r-1)(s-1), \gamma} \right) = \gamma$$

Esto puede ser expresado de la siguiente forma:

$$P \{ (\beta_{u1}, \beta_{u2}, \dots, \beta_{ur}) \} R_\gamma = \gamma$$

donde R_γ es la esfera de confianza, de tamaño γ , y dimensión r-1 para la estimación del punto paramétrico $(\beta_{u1}, \beta_{u2}, \dots, \beta_{ur})$, que tendrá por ecuación

$$\sum_{i,j} (\beta_{ui} - m_{i.})^2 = \frac{S_{uv}^2}{s-1} F_{(r-1), (r-1)(s-1), \gamma}$$

sometida a la restricción:

$$\sum_{i,j} (\beta_{ui} - m_{i.}) = 0$$

Si, como dijimos anteriormente, nuestro interés fundamental reside en analizar la posibilidad de que los β_{ui} sean todos nulos, se tratará de ver si la esfera de confianza incluye al origen $(0, 0, \dots, 0)$. Nuestro problema se reducirá entonces a la comprobación de la veracidad o verificación de la inecuación

$$\frac{(s-1)S_u^2(0)}{S_{uv}^2} < F_{(r-1), (r-1)(s-1), \gamma}$$

Si tal desigualdad se verifica, diremos que la muestra $\{x(u_i, v_j)\}$ avala o confirma la hipótesis estadística de que los β_{ui} son todos nulos, al nivel de confianza γ , o también podríamos decir que los m_i . (estimadores de los parámetros β_{ui}) no son significativamente diferentes de cero, al nivel de significación $1-\gamma$. De esta forma, se contrasta la hipótesis de influencia nula en el producto, por parte del factor u .

Análogamente, para el factor v tendremos que:

$$\frac{(r-1) S_v^2(\beta_{vj})}{S_{uv}^2} = F_{(s-1), (r-1)(s-1)}$$

de donde, al tamaño γ , se tendrá:

$$P \left(\frac{(r-1) S_v^2(\beta_{vj})}{S_{uv}^2} < F_{(s-1), (r-1)(s-1), \gamma} \right) = \gamma$$

que puede ser expresado en la forma:

$$P \{(\beta_{v1}, \beta_{v2}, \dots, \beta_{vs})\} R_\gamma = \gamma$$

donde R_γ es la esfera de confianza, de tamaño γ y dimensión $s-1$, para la estimación del punto paramétrico $(\beta_{v1}, \beta_{v2}, \dots, \beta_{vs})$, que tendrá por ecuación

$$\sum_{i,j} (\beta_{vj} - m_{.j})^2 = \frac{S_{uv}^2}{s-1} F_{(s-1), (r-1)(s-1), \gamma}$$

sometida a la restricción:

$$\sum_{i,j} (\beta_{vj} - m_{.j}) = 0$$

Si pretendemos contrastar la hipótesis de que $\beta_{vj} = 0$, $j = 1, 2, \dots, s$, se tratará de comprobar si se verifica la inecuación

$$\frac{(r-1) S_v^2(0)}{S_{uv}^2} < F_{(s-1), (r-1)(s-1), \gamma}$$

Si tal desigualdad se verifica, se aceptará, al nivel de significación $1-\gamma$, la hipótesis de que $\beta_{vj} = 0$, $j = 1, 2, \dots, s$, lo que es tanto como afirmar que la muestra $\{x(u_i, v_j)\}$ viene a establecer la inexistencia de influencia del factor v en el producto x .

Al modelo que acabamos de presentar lo denomina Wilks Modelo I de Análisis de la Varianza. La denominación de Modelo I, así

como la de Modelo II de Análisis de la Varianza, que posteriormente estableceremos, fueron introducidas por Eisemhart en 1947, y se utilizan frecuentemente. Nosotros preferimos denominarlo método de regresión, por la forma en que, como hemos visto, se estructura el modelo. Componente básica del mismo es, como se ha hecho mención preferente, la hipótesis de normalidad.

Es costumbre generalizada presentar a dicho Modelo I en forma de Tabla de Análisis de la Varianza, de la siguiente forma (donde, como se indicó, $S_u^2(0) = S_u^2$ y $S_v^2(0) = S_v^2$) :

MODELO I : TABLA DE ANALISIS DE LA VARIANZA				
Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media suma de cuadrados	Razón F de Snedecor
Filas	$r-1$	S_u^2	$S_u^2/(r-1)$	$\frac{(s-1)S_u^2}{S_{uv}^2} = F$
Columnas	$s-1$	S_v^2	$S_v^2/(s-1)$	$\frac{(r-1)S_v^2}{S_{uv}^2} = F$
Residuos (error)	$(r-1)(s-1)$	S_{uv}^2	$\frac{S_{uv}^2}{(r-1)(s-1)}$	
Total	$rs-1$	S_T^2		

La primera razón de Snedecor, F_u , se establece para contrastar la hipótesis de que las β_{ui} son todas nulas (y, en consecuencia, la influencia nula del factor u), y la segunda, F_v , para contrastar la hipótesis de que las β_{vj} son así mismo, todas nulas (presentando una influencia nula en el producto del factor v

Quién comenzó a presentar el Modelo I en forma de Tabla de Análisis de la Varianza, en la forma que hemos expresado anteriormente, fue Fisher en 1925, creador e impulsor del mismo, así como del desarrollo de sus fecundas aplicaciones.

Un ejemplo de este análisis pudiera ser el del cálculo de la influencia de los factores de producción, trabajo y capital industrial, en el producto. Suponiendo que u_i representa a un obrero de nivel u_i , que trabaja un determinado número de horas al día

un equipo industrial de nivel v_j , el producto $x(u_i, v_j)$ es el resultado del trabajo de u_i aplicado al equipo v_j . De forma análoga, razonaremos en términos actuariales. En lo que respecta, dentro de este último apartado, al objeto de nuestro trabajo, la tarificación de riesgos, la aplicación del método aparece suficientemente clara: se trata de delimitar con precisión los factores que de manera fundamental condicionan ese producto objeto de la ciencia actuarial: la siniestralidad. Se trata de ver, en definitiva, cómo se puede imputar el riesgo, que se puede traducir en siniestro, a sus distintas componentes, a través de la experiencia disponible de los riesgos que, efectivamente, se han traducido en siniestros.

En todo el estudio que hemos venido efectuando, que configura el llamado método de regresión, o Modelo I de Análisis de la Varianza, para el estudio de la importancia de los factores en el producto, hemos supuesto que los niveles de dichos factores, R y S no eran aleatorios, es decir, que aparecían totalmente determinados a priori. Por ello, cuando el problema del análisis del factor viene planteado suponiendo que los $R = \{1, 2, \dots, r\}$ y $S = \{1, 2, \dots, s\}$ son muestras de tamaño r y s de poblaciones más amplias, e incluso infinitas, al depender las distribuciones de los parámetros $\beta_u, \beta_v, \beta_u^2, \beta_v^2$ y β_{uv}^2 de las poblaciones de R y S , no parece oportuno el empleo del método de la regresión.

El método oportuno, en este caso, será el análisis tradicional de la varianza, o Modelo II de Análisis de la Varianza, que, como es sabido, se basa en la descomposición de la varianza total

$$\sigma_T^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_{uv}^2$$

donde σ_u^2 , varianza correspondiente al factor u , es la componente fila, σ_v^2 , varianza correspondiente al factor v , es la componente columna y σ_{uv}^2 es la varianza residual.

La muestra del producto $x(u, v)$, $\{x_{ij}; i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, s\}$ define una matriz aleatoria cuyos elementos se pueden expresar en la forma:

$$x_{ij} = \mu + \beta_{ui} + \beta_{vj} + \beta_{ui} v_j$$

donde μ es el valor probable de la población, $\mu = E\{x(u,v)\}$, y donde β_{ui}, β_{vj} y $\gamma_{ui,vj}$ son las variables aleatorias con media nula y covarianzas nulas. La varianza σ_T^2 de x_{ij} satisface la descomposición que hemos formulado anteriormente.

El principal problema en el análisis del Modelo II consiste en estimar σ_u^2, σ_v^2 y σ_{uv}^2 a partir de la muestra $\{x_{ij}\}$. A estos efectos, representaremos por $\bar{x}.., \bar{x}_{i.}, \bar{x}_{.j}, S_u^2, S_v^2$ y S_{uv}^2 los conceptos que, al principio de este análisis, se establecieron.

Como tuvimos ocasión de ver, se verificaba:

$$E(S_u^2) = (r-1)(s\sigma_u^2 + \sigma_{uv}^2)$$

$$E(S_v^2) = (s-1)(r\sigma_v^2 + \sigma_{uv}^2)$$

$$E(S_{uv}^2) = (r-1)(s-1)\sigma_{uv}^2$$

lo que nos conducía a los siguientes estimadores insesgados de σ_u^2, σ_v^2 y σ_{uv}^2 :

$$E^{-1}(\sigma_u^2) = \sigma_u^{2*} = \frac{1}{s(r-1)} \left\{ S_u^2 - \frac{S_{uv}^2}{s-1} \right\}$$

$$E^{-1}(\sigma_v^2) = \sigma_v^{2*} = \frac{1}{r(s-1)} \left\{ S_v^2 - \frac{S_{uv}^2}{r-1} \right\}$$

$$E^{-1}(\sigma_{uv}^2) = \sigma_{uv}^{2*} = S_{uv}^2 / (r-1)(s-1)$$

El estimador insesgado de σ^2 , media poblacional, es $\bar{x}..$, como se tuvo ocasión de ver, cuya varianza es:

$$\sigma^2(\bar{x}..) = \sigma_u^2/r + \sigma_v^2/s + \sigma_{uv}^2/rs.$$

Es costumbre, al igual que en el Modelo II, expresar los datos constitutivos del Modelo II de Análisis de la Varianza en forma de cuadro, a través de la siguiente tabla:

MODELO II. TABLA DE ANALISIS DE LA VARIANZA

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados(SC)	Media suma de cuadrados(MSC)	Valor medio de MSC.
Filas	r-1	S_u^2	$S_u^2/(r-1)$	$s\sigma_u^2 + \sigma_{uv}^2$
Columnas	s-1	S_v^2	$S_v^2/(s-1)$	$r\sigma_v^2 + \sigma_{uv}^2$
Residuos (error)	(r-1)(s-1)	S_{uv}^2	$S_{uv}^2/(r-1)(s-1)$	σ_{uv}^2
Total	rs-1	S_T^2		

Los coeficientes que miden la importancia de los factores en la obtención del producto serán:

$$\text{Para el factor } \underline{u}; \quad c_u = \sigma_u^{2*} / \sigma_T^{2*}$$

$$\text{Para el factor } \underline{v}; \quad c_v = \sigma_v^{2*} / \sigma_T^{2*}$$

Análisis de tres factores

Consideramos de interés el análisis de tres factores puesto que, a partir de él, la generalización al caso de k factores cualesquiera es inmediata. Plantear el modelo de análisis para tres factores supondrá, por tanto, establecer la modelización más general del análisis del factor. Las únicas dificultades que se presentarán en el análisis general de k factores serán de tipo terminológico, pero no conceptual.

Sean tres variantes, \underline{u} , \underline{v} y \underline{w} estocásticamente independientes dos a dos, cuyas funciones de distribución son respectivamente, $F_u(u)$, $F_v(v)$ y $F_w(w)$, y sea una función aleatoria de ellas, $x(u,v,w)$. Sean:

$$\mu = E\{x(u,v,w)\} = \iiint_{R^3} x(u,v,w) dF_u(u) dF_v(v) dF_w(w)$$

valor probable de la variante $s(u,v,w)$, y los valores probables:

$$\mu_u = \iint_{R^2} x(u,v,w) dF_v(v) dF_w(w); \quad \mu_v = \iint_{R^2} x(u,v,w) dF_u(u) dF_w(w)$$

$$\mu_w = \iint_{R^2} x(u,v,w) dF_u(u) dF_v(v); \quad \mu_{uv} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u,v,w) dF_w(w);$$

$$\mu_{uw} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u,v,w) dF_v(v); \quad \mu_{vw} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u,v,w) dF_u(u)$$

Sean las variables aleatorias:

$$\beta_u = \mu_u - \mu; \quad \beta_v = \mu_v - \mu; \quad \beta_w = \mu_w - \mu$$

$$\beta_{uv} = \mu_{uv} - \mu_u - \mu_v + \mu; \quad \beta_{uw} = \mu_{uw} - \mu_u - \mu_w + \mu; \quad \beta_{vw} = \mu_{vw} - \mu_v - \mu_w + \mu$$

$$\beta_{uvw} = x(u,v,w) - \mu_{uv} - \mu_{uw} - \mu_{vw} + \mu_u + \mu_v + \mu_w - \mu.$$

Se verifica que, si las variantes, u , v y w son independientes, la variante $x(u,v,w)$ se puede expresar en la forma:

$$x(u,v,w) = \mu + \beta_u + \beta_v + \beta_w + \beta_{uv} + \beta_{uw} + \beta_{vw} + \beta_{uvw}$$

siendo las variantes β con valor probable nulo y covarianzas, asimismo, nulas, por lo que la varianza de $x(u,v,w)$ admite la siguiente descomposición:

$$\sigma^2(x(u,v,w)) = \sigma^2(\beta_u) + \sigma^2(\beta_v) + \sigma^2(\beta_w) + \sigma^2(\beta_{uv}) + \sigma^2(\beta_{uw}) + \sigma^2(\beta_{vw}) + \sigma^2(\beta_{uvw})$$

descomposición de varianza que- por simplicidad terminológica, expresaremos de la siguiente forma:

$$\sigma^2(x(u,v,w)) = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2 + \sigma_{uv}^2 + \sigma_{uw}^2 + \sigma_{vw}^2 + \sigma_{uvw}^2$$

Los coeficientes β_{uv} , β_{uw} y β_{vw} expresarán la importancia factorial de la interacción de los factores.

La anterior fórmula constituye el "teorema de descomposición de la varianza" para tres factores, que permite cuantificar la importancia que en el producto o "output" $x(u,v,w)$ tienen los factores o "inputs" u , v y w .

El problema estadístico consistirá en la estimación de los parámetros β , fundamentalmente de β_u , β_v y β_w . La información estadística vendrá dada por valores muestrales de $x(u,v,w)$ según el siguiente esquema: Supongamos que el factor u puede presentarse en los r niveles u_1, u_2, \dots, u_r , que el factor v puede presentarse en los s niveles v_1, v_2, \dots, v_s , y que el factor w en los t niveles w_1, w_2, \dots, w_t . El conjunto de valores $x(u_i, v_j, w_k)$ es la muestra del "output" correspondiente a los "inputs" u_i, v_j, w_k . En definitiva, la información muestral vendrá expresada en la matriz $X = \{x(u_i, v_j, w_k); i=1, 2, \dots, r; j=1, 2, \dots, s; k=1, 2, \dots, t\}$, cuya función de distribución será:

$$\prod_{i=1}^r F_u(u_i) \prod_{j=1}^s F_v(v_j) \prod_{k=1}^t F_w(w_k)$$

La matriz X será una matriz aleatoria de tercer orden, que se compondrá de r filas, s columnas y t niveles o capas.

Definamos los siguientes elementos muestrales:

$$x_{ijk} = x(u_i, v_j, w_k)$$

$$x'_{ijk} = x_{ijk}^{-u}$$

$$\bar{x} \dots = \sum_{i,j,k} x_{ijk} / rst$$

$$\bar{x}_{i..} = \sum_{j,k} x_{ijk}/st; \quad \bar{x}_{.j.} = \sum_{i,k} x_{ijk}/rt; \quad \bar{x}_{..k} = \sum_{i,j} x_{ijk}/rs;$$

$$\bar{x}_{ij.} = \sum_k x_{ijk}/t; \quad \bar{x}_{i.k} = \sum_j x_{ijk}/s; \quad \bar{x}_{.jk} = \sum_i x_{ijk}/r$$

donde $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$ y $k = 1, 2, \dots, t$.

Cada elemento muestral, x_{ijk} , se podrá expresar como suma de variantes de la siguiente forma:

$$x_{ijk} = \mu + \beta_{i..} + \beta_{.j.} + \beta_{..k} + \beta_{ij.} + \beta_{i.k} + \beta_{.jk} + \beta_{ijk}$$

Definamos las sumas de cuadrados:

$$S_T^2 = \sum_{i,j,k} (x_{ijk} - \bar{x}_{...})^2$$

$$S_u^2 = \sum_{i,j,k} (\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...})^2; \quad S_v^2 = \sum_{i,j,k} (\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...})^2;$$

$$S_w^2 = \sum_{i,j,k} (\bar{x}_{..k} - \bar{x}_{...})^2; \quad S_{uv}^2 = \sum_{i,j,k} (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2;$$

$$S_{uw}^2 = \sum_{i,j,k} (\bar{x}_{i.k} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..k} + \bar{x}_{...})^2$$

$$S_{vw}^2 = \sum_{i,j,k} (\bar{x}_{.jk} - \bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{..k} + \bar{x}_{...})^2$$

$$S_{uvw}^2 = \sum_{i,j,k} (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i.k} - \bar{x}_{.jk} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{..k} - \bar{x}_{...})^2$$

Se verificará la relación:

$$S_T^2 = S_u^2 + S_v^2 + S_w^2 + S_{uv}^2 + S_{uw}^2 + S_{vw}^2 + S_{uvw}^2$$

Se acostumbra denominarse a S_u^2 la componente fila de S_T^2 , a S_v^2 la componente columna de S_T^2 y a S_w^2 la componente de nivel de S_T^2 ; a S_{uv}^2 se la denomina componente de interacción fila-columna de S_T^2 , etc., y, por último, S_{uvw}^2 será la componente residual de S_T^2 .

Dado que: $E(x_{ijk}) = \mu$, $i=1, 2, \dots, r$; $j=1, 2, \dots, s$; $k=1, 2, \dots, t$, es evidente que se verifica:

$$E(\bar{x}_{...}) = \mu$$

En la determinación de los valores probables de las sumas de cuadrados S^2 , así como de la varianza $\bar{x}_{...}$, nos encontramos con que el valor probable en cada caso es una función lineal de varianzas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
E(x'_{ijk}x'_{i'j'k'}) &= \sigma^2 && \text{si } i=i', j=j', k=k' \\
&= \sigma_{uv}^2 + \sigma_u^2 + \sigma_v^2 && \text{si } i=i', j=j', k \neq k' \\
&= \sigma_{uw}^2 + \sigma_u^2 + \sigma_w^2 && \text{si } i=i', j \neq j', k=k' \\
&= \sigma_{vw}^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2 && \text{si } i \neq i', j=j', k=k' \\
&= \sigma_u^2 && \text{si } i=i', j \neq j', k \neq k' \\
&= \sigma_v^2 && \text{si } i \neq i', j=j', k \neq k' \\
&= \sigma_w^2 && \text{si } i \neq i', j \neq j', k=k' \\
&= 0 && \text{si } i \neq i', j \neq j', k \neq k'
\end{aligned}$$

donde $\sigma^2 = \sigma^2(x(u,v,w))$, cuya descomposición se formuló anteriormente.

Mediante sencillos desarrollos se obtiene:

$$E(S_w^2) = rs(t-1)\{\sigma_w^2 + \sigma_{vw}^2/s + \sigma_{uw}^2/r + \sigma_{uvw}^2/rs\}$$

$$E(S_v^2) = rt(s-1)\{\sigma_v^2 + \sigma_{vw}^2/t + \sigma_{uv}^2/r + \sigma_{uvw}^2/rt\}$$

$$E(S_u^2) = st(r-1)\{\sigma_u^2 + \sigma_{uw}^2/t + \sigma_{uv}^2/s + \sigma_{uvw}^2/st\}$$

$$E(S_{vw}^2) = r(s-1)(t-1)\{\sigma_{vw}^2 + \sigma_{uvw}^2/r\}$$

$$E(S_{uw}^2) = s(r-1)(t-1)\{\sigma_{uw}^2 + \sigma_{uvw}^2/s\}$$

$$E(S_{uv}^2) = t(r-1)(s-1)\{\sigma_{uv}^2 + \sigma_{uvw}^2/t\}$$

$$E(S_{uvw}^2) = (r-1)(s-1)(t-1)\sigma_{uvw}^2$$

Evidentemente, dado que, como dijimos, se verifica la descomposición:

$$S_T^2 = S_u^2 + S_v^2 + S_w^2 + S_{uv}^2 + S_{uw}^2 + S_{vw}^2 + S_{uvw}^2,$$

se tendrá que, por ser E un operador lineal, $E(S_T^2)$ será la suma de los segundos miembros de las anteriores relaciones de igualdad

Así mismo, la varianza de $\bar{x} \dots$ será:

$$\sigma^2(\bar{x} \dots) = \sigma_u^2/r + \sigma_v^2/s + \sigma_w^2/t + \sigma_{uv}^2/rs + \sigma_{uw}^2/rt + \sigma_{vw}^2/st + \sigma_{uvw}^2/rst.$$

Consideremos la muestra $x(u_i, v_j, w_k) = x_{ijk}$, $i=1,2,\dots,r$; $j=1,2,\dots,s$; $k=1,2,\dots,t$, del producto x correspondiente a los factores u_i, v_j, w_k , definida por la matriz muestral x_{ijk} ;

$i=1,2,\dots,r; j=1,2,\dots,s; k=1,2,\dots,t$, como un conjunto de rst variables aleatorias independientes, con igual varianza, $\text{var}(x_{ijk}) = \sigma^2$ y con valor probable:

$$E(x_{ijk}) = \mu + \beta_{ui} + \beta_{vj} + \beta_{wk} + \beta_{uivj} + \beta_{uiwk} + \beta_{vjwk}$$

verificándose:

$$\sum_{i=1}^r \beta_{ui} = \sum_{j=1}^s \beta_{vj} = \sum_{k=1}^t \beta_{wk} = 0$$

$$\sum_{i=1}^r \beta_{uivj} = \sum_{j=1}^s \beta_{uivj} = 0; \quad \sum_{i=1}^r \beta_{uiwk} = \sum_{k=1}^t \beta_{uiwk} = 0$$

$$\sum_{j=1}^s \beta_{vjwk} = \sum_{k=1}^t \beta_{vjwk} = 0.$$

La matriz aleatoria de tercer orden $\{x_{ijk}\}$ se compone de r filas, s columnas y t capas o niveles. Las filas expresan los r valores del factor u , u_1, u_2, \dots, u_r , las columnas representan los s valores del factor v , v_1, v_2, \dots, v_s y los niveles expresan los t valores del factor w , w_1, w_2, \dots, w_t . Pues bien, se suele decir que β_{ui} expresa el efecto diferencial debido a u_i , β_{vj} sería el efecto diferencial debido a v_j y β_{wk} el efecto diferencial de w_k ; análogamente, β_{uivj} expresa el efecto diferencial asociado a (u_i, v_j) , o, mejor, la interacción entre los valores u_i y v_j de los factores u y v , y así sucesivamente.

El problema fundamental es la estimación de los parámetros μ, β_{ui}, \dots , etc., que definían a $E(x_{ijk})$ como un modelo lineal. Para ello, definimos los siguientes estadísticos muestrales:

$$m = \bar{x} \dots$$

$$m_{i..} = \bar{x}_{i..} - \bar{x} \dots; \quad m_{.j.} = \bar{x}_{.j.} - \bar{x} \dots; \quad m_{..k} = \bar{x}_{..k} - \bar{x} \dots;$$

$$m_{ij.} = \bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x} \dots; \quad m_{i.k} = \bar{x}_{i.k} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..k} + \bar{x} \dots;$$

$$m_{.jk} = \bar{x}_{.jk} - \bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{..k} + \bar{x} \dots$$

definamos, así mismo, las siguientes sumas de cuadrados:

$$S^2 = \sum_{i,j,k} (x_{ijk} - \mu - \beta_{ui} - \beta_{vj} - \beta_{wk} - \beta_{uivj} - \beta_{uiwk} - \beta_{vjwk})^2$$

$$S_{uvw}^2 = \sum_{i,j,k} (x_{ijk} - m_{i..} - m_{.j.} - m_{..k} - m_{ij.} - m_{i.k} - m_{.jk})^2$$

$$\begin{aligned}
S_{uv}^2(\beta_{uivj}) &= \sum_{i,j,k} (m_{ij.} - \beta_{uivj})^2; & S_{uw}^2(\beta_{uiwk}) &= \sum_{i,j,k} (m_{i.k} - \beta_{uiwk})^2 \\
S_{vw}^2(\beta_{vjwk}) &= \sum_{i,j,k} (m_{.kj} - \beta_{vjwk})^2; & S_u^2(\beta_{ui}) &= \sum_{i,j,k} (m_{i..} - \beta_{ui})^2 \\
S_v^2(\beta_{vj}) &= \sum_{i,j,k} (m_{.j.} - \beta_{vj})^2; & S_w^2(\beta_{wk}) &= \sum_{i,j,k} (m_{...k} - \beta_{wk})^2 \\
S_{ooo}^2(\mu) &= \sum_{i,j,k} (m - \mu)^2
\end{aligned}$$

Se puede apreciar que S_{uvw}^2 coincide exactamente con el que se definió anteriormente, así como que $S_{uv}^2(0) = S_{uv}^2$ que se definió anteriormente, $S_u^2(0) = S_u^2$, etc. De esta forma, se tendrá la siguiente descomposición de S^2 :

$$\begin{aligned}
S^2 &= S_{uvw}^2 + S_{uv}^2(\beta_{uivj}) + S_{uw}^2(\beta_{uiwk}) + S_{vw}^2(\beta_{vjwk}) + S_u^2(\beta_{ui}) + S_v^2(\beta_{vj}) + \\
&+ S_w^2(\beta_{wk}) + S_{ooo}^2(\mu)
\end{aligned}$$

Los estimadores lineales de mínima varianza de los parámetros $\mu, \beta_{ui}, \beta_{vj}$, etc. serán aquellos que minimicen la función S^2 que acabamos de definir y cuya descomposición acabamos de expresar. Tal proceso de minimización conduce a los siguientes estimadores:

$$\begin{aligned}
\mu^* &= m; & \beta_{ui}^* &= m_{i..}; & \beta_{vj}^* &= m_{.j.}; & \beta_{wk}^* &= m_{...k}; \\
\beta_{uivj}^* &= m_{ij.}; & \beta_{uiwk}^* &= m_{i.k}; & \beta_{vjwk}^* &= m_{.jk}
\end{aligned}$$

Un estimador insesgado de σ^2 será:

$$\sigma^{2*} = S_{uvw}^2 / (r-1)(s-1)(t-1)$$

La matriz de covarianzas de los estimadores que acabamos de ver presenta los siguientes elementos fundamentales:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(m) &= \sigma^2 / rst; & \sigma^2(m_{i..}) &= (r-1)\sigma^2 / rst; \\
\sigma^2(m_{i..}, m_{i'..}) &= -\sigma^2 / rst, \quad i \neq i'; & \sigma^2(m_{ij.}) &= (r-1)(s-1)\sigma^2 / rst; \\
\sigma^2(m_{ij.}, m_{ij'.}) &= -(r-1)\sigma^2 / rst, \quad j \neq j'; \\
\sigma^2(m_{ij.}, m_{i'j'.}) &= -\sigma^2 / rst, \quad i \neq i', \quad j \neq j'.
\end{aligned}$$

Las covarianzas entre los m porcedentes de cualesquiera dos de los siguientes conjuntos: m , $\{m_{i..}\}$, $\{m_{.j.}\}$, $\{m_{...k}\}$, $\{m_{ij.}\}$, $\{m_{i.k}\}$, $\{m_{.jk}\}$ serán todas nulas.

La hipótesis de normalidad, es decir, la suposición de que el conjunto de variables aleatorias $\{x_{ijk}; i=1,2,\dots,r; j=1,2,\dots,s; k=1,2,\dots,t\}$ están independientemente distribuidas, con distribución normal

$$N(\mu + \beta_{ui} + \beta_{vj} + \beta_{wk} + \beta_{uivj} + \beta_{uiwk} + \beta_{vjwk}; \sigma^2)$$

conduce a que los siguientes estadísticos sean variables aleatorias independientes, con distribuciones χ^2 siguientes:

$$S_{uvw}^2 / \sigma^2 = \chi^2_{(r-1)(s-1)(t-1)}$$

$$S_{uv}^2(\beta_{uivj}) / \sigma^2 = \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$

$$S_{uw}^2(\beta_{uiwk}) / \sigma^2 = \chi^2_{(r-1)(t-1)}$$

$$S_{vw}^2(\beta_{vjwk}) / \sigma^2 = \chi^2_{(s-1)(t-1)}$$

$$S_u^2(\beta_{ui}) / \sigma^2 = \chi^2_{(r-1)}$$

$$S_v^2(\beta_{vj}) / \sigma^2 = \chi^2_{(s-1)}$$

$$S_w^2(\beta_{wk}) / \sigma^2 = \chi^2_{(t-1)}$$

$$S_{ooo}^2(\mu) / \sigma^2 = \chi^2_1$$

A partir de estas distribuciones, se pueden establecer sin dificultad intervalos de confianza para los parámetros μ , β_{ui} , β_{vj} , etc., y regiones de confianza para la estimación simultánea de varios parámetros, al igual que hicimos en el caso de dos factores. Así mismo, se puede establecer, sin grandes dificultades, la tabla o cuadro de este Modelo I de Análisis de la Varianza, como efectuamos en el apartado de dos factores.

Hemos completado nuestro estudio del llamado Modelo I de Análisis de la Varianza para tres factores. En dicho modelo, se ha supuesto que los niveles de dichos factores R, S y T, no eran aleatorios, es decir, que aparecían totalmente determinados a priori. Por ello, cuando el problema del análisis del factor viene planteado suponiendo que los $R\{1,2,\dots,r\}$, $S\{1,2,\dots,s\}$ y $T\{1,2,\dots,t\}$ son muestras del tamaño r, s y t de poblaciones que supondremos infinitas, al depender de las distribuciones de los parámetros β_u, β_v , etc. de las poblaciones R, S y T, no resulta

oportuno el empleo del método de la regresión. Se establece, entonces, el Modelo II de Análisis de la Varianza, que, para el caso de tres factores, pasamos a analizar.

Sea la muestra $\{x_{ijk}; i=1,2,\dots,r; j=1,2,\dots,s; k=1,2,\dots,t\}$ con niveles r , s y t aleatorios. Cada elemento muestral, x_{ijk} , se podrá expresar en la forma de suma de variantes con valor probable nulo y covarianzas, así mismo, nulas, de la siguiente forma:

$$x_{ijk} = \mu + \beta_{ui} + \beta_{vj} + \beta_{wk} + \beta_{uivj} + \beta_{uiwk} + \beta_{vjwk} + \beta_{uivjk}$$

La varianza σ^2 de x_{ijk} se podrá expresar como suma de siete componentes, de la siguiente forma:

$$\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2 + \sigma_{uv}^2 + \sigma_{vw}^2 + \sigma_{uw}^2 + \sigma_{uvw}^2$$

El problema fundamental planteado en el Modelo II consiste en estimar esas varianzas a partir de la muestra $\{x_{ijk}\}$. Recordando que anteriormente obtuvimos:

$$E(S_u^2) = st(r-1)\{\sigma_u^2 + \sigma_{uw}^2/t + \sigma_{uv}^2/s + \sigma_{uvw}^2/st\}$$

$$E(S_v^2) = rt(s-1)\{\sigma_v^2 + \sigma_{vw}^2/t + \sigma_{uv}^2/r + \sigma_{uvw}^2/rt\}$$

$$E(S_w^2) = rs(t-1)\{\sigma_w^2 + \sigma_{vw}^2/t + \sigma_{uw}^2/r + \sigma_{uvw}^2/rs\}$$

etcétera se presentarán los siguientes estimadores insesgados de las varianzas:

$$E^{-1}(\sigma_{uvw}^2) = \sigma_{uvw}^{2*} = S_{uvw}^2 / (r-1)(s-1)(t-1)$$

$$E^{-1}(\sigma_{uv}^2) = \sigma_{uv}^{2*} = S_{uv}^2 / t(r-1)(s-1) - E^{-1}(\sigma_{uvw}^2) / t$$

$$E^{-1}(\sigma_{uw}^2) = \sigma_{uw}^{2*} = S_{uw}^2 / s(r-1)(t-1) - E^{-1}(\sigma_{uvw}^2) / s$$

$$E^{-1}(\sigma_{vw}^2) = \sigma_v^{2*} = S_{vw}^2 / r(s-1)(t-1) - E^{-1}(\sigma_{uvw}^2) / r$$

$$E^{-1}(\sigma_u^2) = \sigma_u^{2*} = S_u^2 / st(r-1) - E^{-1}(\sigma_{uv}^2) / s - E^{-1}(\sigma_{uw}^2) / t - E^{-1}(\sigma_{uvw}^2) / st$$

$$E^{-1}(\sigma_v^2) = \sigma_v^{2*} = S_v^2 / rt(s-1) - E^{-1}(\sigma_{uv}^2) / r - E^{-1}(\sigma_{vw}^2) / t - E^{-1}(\sigma_{uvw}^2) / rt$$

$$E^{-1}(\sigma_w^2) = \sigma_w^{2*} = S_w^2 / rs(t-1) - E^{-1}(\sigma_{uw}^2) / r - E^{-1}(\sigma_{vw}^2) / s - E^{-1}(\sigma_{uvw}^2) / rs$$

Un estimador insesgado de μ , media poblacional, es $\bar{x}_{...} = m$, como se tuvo ocasión de ver, cuya varianza es:

$$\sigma^2(\bar{x}_{...}) = \sigma_u^2/r + \sigma_v^2/s + \sigma_w^2/t + \sigma_{uv}^2/rs + \sigma_{uw}^2/rt + \sigma_{vw}^2/st + \sigma_{uvw}^2/rst$$

Los coeficientes que medirán la importancia de los factores en la obtención del producto serán:

Para el factor u : $c_u = \sigma_u^{2*} / \sigma^{2*}$

Para el factor v : $c_v = \sigma_v^{2*} / \sigma^{2*}$

Para el factor w : $c_w = \sigma_w^{2*} / \sigma^{2*}$

Al igual que en el caso de dos factores, se puede elaborar sin dificultad una tabla o cuadro del Modelo II de Análisis de la Varianza, en la que se recojan los elementos más significativos de dicho modelo.

El análisis que hemos efectuado de la influencia de tres factores en la obtención de un producto es inmediatamente generalizable al caso k -dimensional, sin que esa generalización suponga incorporación de elementos conceptualmente nuevos de tipo alguno, sino únicamente una mayor complicación formal de las expresiones correspondientes.

Con esto finalizamos nuestro estudio del Análisis del Factor, que tan trascendental papel juega en el proceso de tarificación de riesgos, como hemos tenido ocasión de ver. El caso más importante, que es el Análisis de la Varianza, se encuentra suficientemente desarrollado en varios textos, por lo que no consideramos oportuno incidir más en él. Baste, si acaso, mencionar el texto de Kendall (1) como obra que ha desarrollado con especial detalle este modelo, y a la que aquí nos remitimos para estas cuestiones.

(1) Kendall, Maurice G.: The Advanced Theory of Statistics. Vol. II, Parte 1: Pag. 175-217. Parte 2: Pag. 218-246. Griffin & Co, 1951 (3º Ed.).

III.3.-TARIFICACION A POSTERIORI

Como dijimos al introducir el concepto de tarificación estadística y de sistemas de tarificación, por tarificación entenderemos el proceso que tiene por objeto la determinación de primas equitativas para cada riesgo, sin olvidar que tales primas han de proporcionar una adecuada estabilidad a la entidad aseguradora. Los principios técnicos en que se basa la elaboración de una tarifa constituyen el sistema de tarificación correspondiente.

También dijimos que, básicamente, se podía hablar de dos sistemas fundamentales de tarificación, a saber:

- a/ La tarificación propiamente dicha, tarificación a priori o tarificación por clases (class rating).
- b/ La tarificación a posteriori o según experiencia (experience rating).

En la tarificación a posteriori, o según experiencia, al contrario que en la tarificación propiamente dicha, se parte de la existencia de una prima inicial (para el individuo o el grupo) que se va modificando para dar lugar a las primas de los periodos sucesivos. No obstante, en un sentido más amplio, la expresión "experience rating" se aplica a todo problema de actualización de tarifas, mediante la incorporación de nueva información.

Dentro de la tarificación a posteriori, se puede hablar de dos grandes grupos de métodos de tarificación, según el principio que en el método prevalezca.

- a/ Principio de eficacia en la tarificación (consideración individual del riesgo). En este caso se da entrada exclusivamente a la información sobre los antecedentes del riesgo. Los principales métodos en este caso son el bonus-malus y en general todos los métodos de bonificación, la prima modelada sobre el riesgo, el "merit rating", el "retrospective rating", etc.
- b/ Principio de eficacia y de estabilidad (consideración de un colectivo o grupo). Corresponde el estudio de este caso a la matemática de la estabilidad. Entre los métodos o sistemas i

pirados en este principio están el de distribución de dividendos (premium refund) y el de participación en beneficios.

Vamos a analizar con mayor o menor detención todos estos métodos de tarificación, y algunos otros, pero antes de proceder a ello, consideramos oportuno referirnos al acertado análisis de Norberg (1) sobre la necesidad de las tarificaciones según experiencia, del "experience rating" en general, y de las bonificaciones en particular, vehículos a motor, que es homogéneo con respecto a algunos factores de riesgo directamente observables, tales como el tipo y uso del vehículo y el lugar de residencia del conductor. En este grupo habrá todavía distintas propensiones al accidente, debido a factores de riesgo no observables tales como el temperamento y la habilidad del conductor. A lo largo del tiempo, esos factores de riesgo no observables a priori se manifestarán y evidenciarán mediante la experiencia de los siniestros que se vayan produciendo. Con la finalidad de elaborar primas equitativas y adecuadas, parece necesario modificar periódicamente las primas y permitir que la prima individual de un periodo dependa del número de siniestros producidos por el asegurado durante los periodos precedentes. Los sistemas de bonificación (bonus) representan una importante forma de tal tarificación individual según experiencia (individual experience rating)".

Norberg modeliza matemáticamente estos conceptos de la siguiente forma: Sea X_n la variante expresiva del daño total (montante total de siniestralidad) correspondiente a un solo asegurado en el periodo n . X_n puede ser definida de la siguiente forma:

$$X_n = \sum_{j=0}^{M_n} Y_{nj},$$
 Donde M_n es el número de siniestros producido en el periodo n , e Y_{n1}, \dots, Y_{nM_n} son las correspondientes cuantías

(1) Norberg, Ragnar: A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems. Scandinavian Actuarial Journal. 1976. nº 2. Pag. 92-107

de los siniestros (cuando $M_n \geq 1$), siendo $Y_{no} = 0$. Representemos la propensión al accidente del asegurado por el parámetro de riesgo θ . Al decir que θ representa la propensión al accidente del asegurado queremos significar precisamente que las distribuciones de probabilidad de las variantes M_n e Y_{nj} , y, en consecuencia, X_n , dependen de θ . El valor del parámetro de riesgo de un asegurado en un grupo es considerado como una realización de una variable aleatoria θ , cuya función de distribución U representa la estructura de riesgo del grupo. Los elementos básicos del modelo serán: $P(A/\theta=\theta)$, $E(X/\theta=\theta)$, y $\text{Var}(X/\theta=\theta)$. El objeto de la tarificación individual según experiencia puede ser ahora definido de la siguiente forma: Si el parámetro de riesgo individual θ fuera conocido, entonces por el principio de equivalencia, la prima individual para el n -ésimo período sería $E(X_n/\theta=\theta)$ (no consideramos en este momento recargo de seguridad ni administrativo alguno). Pero θ es inobservable, y, en consecuencia, $E(X_n/\theta=\theta)$ es desconocido para el asegurador. De cualquier forma, al principio del n -ésimo período, la experiencia individual de siniestros del asegurado en los $n-1$ precedentes períodos,

$$\zeta_n = (M_1, \dots, M_{n-1}, Y_{10}, \dots, Y_{1M_1}, Y_{20}, \dots, Y_{n-1,0}, \dots, Y_{n-1,M_{n-1}})$$

contiene alguna información concerniente al valor de θ . Como una prima individual para el período n se puede utilizar una estimación de $E(X_n/\theta=\theta)$, basada en la información disponible ζ_n . La formulación del problema de la tarificación individual según experiencia es, precisamente, un problema de estimación en el sentido Bayesiano, como hemos tenido ocasión de ver.

Analizada la importancia, e incluso diríamos que el carácter casi imprescindible de la tarificación según experiencia, por la imposibilidad de que las clases de riesgo sean completamente homogéneas, comencemos el estudio de los sistemas de tarificación a posteriori más importantes, empezando por el de más interés de ellos.

SISTEMA BONUS - MALUS

El sistema de tarificación Bonus-Malus es un sistema de tarificación según experiencia en el que, partiendo de una prima uniforme para la clase de riesgo a la que pertenece el asegurado, se procede a bonificar (bonus) o, por el contrario, a penalizar (malus) para periodos sucesivos en función de la experiencia de siniestralidad que se va teniendo, es decir, en función del propio comportamiento del asegurado respecto al riesgo objeto de seguro. Este sistema de bonificación-penalización tiene una importancia especial en el seguro del automóvil, donde tan importante papel juega la disposición del asegurado respecto al riesgo, es decir, los factores de tipo psicológico y, en consecuencia, donde tan importante es incentivar al asegurado respecto a la conveniencia de no incurrir en siniestros o, caso de que éstos se produzcan, que su número sea el mínimo posible. Como un ejemplo de sistema bonus-malus, describamos el sistema de tarificación empleado en el seguro del automóvil por los asegurados noruegos en 1975: Los periodos de seguro son de un año de duración. El asegurado satisface, en el primer año de seguro, una prima inicial, que es la misma para todos ellos. Una vez transcurrido un año, la prima inicial uniforme se incrementa en un 20% por cada siniestro (20% si se produce un siniestro, un 40% si se producen dos siniestros, etc.) mientras que tal prima sufre una reducción del 10% después de cada año sin siniestro. La prima que efectivamente se satisface en cada periodo del seguro está acotada inferiormente en el 30% y superiormente en el 150% de la prima inicial. Hay una excepción a la regla general de bonificación-penalización anteriormente formulada: Desde el 140% y el 150% de niveles de primas, el asegurado alcanza directamente el nivel del 120% de la prima inicial después de un año sin declarar siniestros.

Definamos de manera adecuada lo que entenderemos por un sistema de bonificación o de bonus. Siguiendo a Ragnar Norberg, en su trabajo que anteriormente hemos reseñado, por un sistema de de bonus entenderemos un sistema de tarificación según experiencia

definido por los siguientes elementos:

- 1/ Los periodos de seguro son de igual dimensión temporal.
- 2/ Las pólizas se dividen en un número finito K de clases de bon numeradas del 1 al K . Toda póliza pertenece a una y sólo a una clase de bonus, y permanece en la misma a lo largo de un periodo de seguro.
- 3/ La prima correspondiente a un periodo es $\Pi(j)$ para todas las pólizas de la clase j . El vector $\Pi=(\Pi(1),\dots,\Pi(K))$ es la denominada escala la bonus. (por convenio, las clases son usualmente numeradas de forma tal que se verifique: $\Pi(j) \geq \Pi(j+1)$ para $j=1,2,\dots,K-1$, y diremos que la clase $j+1$ es una "mejor" o "superior" clase que la clase j).
- 4/ Se procede a situar a todas las pólizas en la misma clase inicial, digamos clase k , en el primer periodo.
- 5/ Se define un conjunto de reglas de bonus, que determinan la clase de bonus a que pertenece una póliza cualquiera en cualquier periodo como función de (fundamentalmente) su clase de bonus en el periodo precedente y el número de siniestros acaecidos en dicho periodo.

Para cada par ordenado de clases de bonus, i y j , sea T_{ij} el conjunto de enteros r tal que una póliza es transferida de la clase i a la clase j después de que en el periodo se hayan producido r siniestros. Las reglas de bonus pueden ser entonces representadas por una matriz de orden $K \times K$, $T=\{T_{ij}\}$. En orden a que las reglas de bonus sean completas y libres de contradicciones, se debe verificar:

$$\bigcup_{j=1}^K T_{ij} = \{0,1,2,\dots\} \text{ y } T_{ij} \cap T_{ij'} = \emptyset \text{ siempre que } j \neq j'.$$

(Usualmente deberá también ser $r > r'$ siempre que $r \in T_{ij}$, $r' \in T_{ij'}$ y $\Pi(j) > \Pi(j')$, dado que el objetivo fundamental del sistema de bonus debería ser asignar malos riesgos a las clases de bajos bonus y buenos riesgos a las clases altas de bonus).

Cuando la dimensión del periodo temporal está dada, un sistema de bonus S se define por la terna (T, Π, K) .

El sistema de tarificación noruego, al que antes nos hemos referido, tiene $k = 13$ clases de bonus. La clase inicial es $k = 6$. La escala de bonus está dada por la prima (6) de la clase inicial y la relación:

$$\pi(j) = \left(1 + \frac{6-j}{10}\right) \pi(6), \quad j=1,2,\dots,13$$

Las reglas de bonus vienen definidas por el siguiente cuadro (donde no aparecen escritos los conjuntos vacíos).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	{1,2,...}			{0}									
2	{1,2,...}			{0}									
3	{1,2,...}			{0}									
4	{1,2,...}	{1}			{0}								
5	{1,2,...}		{1}			{0}							
6	{3,4,...}	{2}		{1}			{0}						
7	{3,4,...}		{2}		{1}			{0}					
8	{4,5,...}	{3}		{2}		{1}			{0}				
9	{4,5,...}		{3}		{2}		{1}			{0}			
10	{5,6,...}	{4}		{3}		{2}		{1}			{0}		
11	{5,6,...}		{4}		{3}		{2}		{1}			{0}	
12	{6,7,...}	{5}		{4}		{3}		{2}		{1}			{0}
13	{6,7,...}		{5}		{4}		{3}		{2}		{1}		{0}

Norberg, en el trabajo que venimos analizando, se plantea el problema de la medida de la eficiencia de un sistema de bonus, y, en consecuencia, de la obtención de sistemas de bonus que maximicen dicha eficiencia. Para ello, toma como medida de la eficiencia de un sistema de bonus en modelo muy simple, cual es la desviación cuadrática media entre el daño total esperado por el asegurado y su prima en el n -ésimo periodo de seguro, cuando $n \rightarrow \infty$, y demuestra que para cualquier conjunto de reglas de bonus (que determinan las clases de transición del bonus) hay una óptima

escala de primas, que coincide con la propuesta por Pesonen (1) en 1963. De esta forma, el problema de elección de un eficiente sistema de bonus conduce a la elección de adecuadas reglas de bonus.

Un trabajo clásico sobre el tema de las bonificaciones, considerado como auténtico pionero en estas materias, es el de Ulf Grenander titulado "Some Remarks on Bonus Systems in Automobile Insurance" (2). En él, Grenander modeliza los sistemas de bonificación o bonus de la siguiente forma: Sea la variable temporal discreta $t = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$. En cada punto temporal, y para una cierta póliza, existe una probabilidad p de que se produzca un siniestro en ese momento. La cuantía del siniestro, X , será una variable aleatoria, cuyo valor medio tomaremos como la unidad monetaria de nuestro trabajo. El sistema de bonus dividirá el grupo de pólizas en k clases, C_1, C_2, \dots, C_k , y denotaremos la prima en la clase C_i por n_i . Para una póliza de cualquier clase C_i , existirán unos números u_i y v_i , tales que la póliza se traslada a la clase de índice u_i o v_i en el tiempo $t+1$ según que se haya producido, o no, un siniestro en el tiempo t . Los gastos se supondrán de α si no se produce siniestro y de $\alpha+\beta$ en otro caso. Supondremos que los riesgos son constantes en el tiempo, es decir, que no varía el valor de p .

Consideremos el caso más simple posible de sistema de bonus, en el que no haya más que dos clases de bonificación, C_1 y C_2 , y las reglas: $u_1=u_2=1$; $v_1=v_2=2$. En definitiva, la póliza estará en la primera clase en el tiempo t si y sólo si se produjo un siniestro en el tiempo $t-1$. ¿Cuál es la probabilidad de equilibrio de una póliza, caracterizada por el valor p del parámetro

(1) Pesonen, E.: A numerical method of finding a suitable bonus scale. The Actuarial Bulletin. Vol. II, Part. I. 1963. Pag. 102-108

(2) Grenander, Ulf: Some Remarks on Bonus Systems in Automobile Insurance. Skand. Aktuar. 1957. Pag. 180-197

de riesgo, esté en la clase C_i ?. Denotando esa probabilidad por

$\Pi_i = \Pi_i(p)$, tendremos:

$$\begin{cases} \Pi_1 = \Pi_1 p + \Pi_2 p = p \\ \Pi_2 = \Pi_1 (1-p) + \Pi_2 (1-p) = 1-p \end{cases}$$

El ingreso medio de prima para tal póliza es:

$$I(p) = p n_1 + (1-p) n_2 = n_2 + (n_1 - n_2) p$$

Por otro lado, la póliza genera costes y siniestros cuyo montante, en media, es:

$$U(p) = p + \alpha (1-p) + (\alpha + \beta) p = \alpha + (1 + \beta) p$$

En un sistema completamente equilibrado, se deben igualar $I(p)$ y $U(p)$ para todos los posibles valores de p . Esto es factible si ponemos:

$$n_1 = 1 + \alpha + \beta \quad n_2 = \alpha$$

En general, esto implicaría una considerable diferencia entre n_1 y n_2 , siendo la primera de dichas primas muy superior a la segunda.

Consideremos ahora un sistema con tres clases de bonus, $k=3$, y las reglas: $u_1=u_2=u_3=1$; $v_1=v_2=v_3=3$. Esto significa que la póliza se traslada hacia una clase superior o dos clases inferiores, dependiendo de que se haya producido o no siniestro, respectivamente. Se verifica:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi_1 p + \Pi_2 p + \Pi_3 p \\ \Pi_2 &= \Pi_1 q \\ \Pi_3 &= \Pi_2 q + \Pi_3 q \end{aligned} \right\} \text{que nos da } \begin{cases} \Pi_1(p) = p \\ \Pi_2(p) = p - p^2 \\ \Pi_3(p) = 1 - 2p + p^2 \end{cases}$$

Haciendo $U(p)$ igual a $I(p)$, nos encontramos:

$$\alpha + (1 + \beta) p = n_1 p + n_2 (p - p^2) + n_3 (1 - 2p + p^2) = n_3 + p(n_1 + n_2 - 2n_3) + p^2(n_3 - n_2)$$

y, por tanto:

$$n_1 = 1 + \alpha + \beta; \quad n_2 = \alpha; \quad n_3 = \alpha$$

Este sistema es equivalente al anterior, como se puede fácilmente comprobar definiendo las nuevas clases $C' = C_1$, $C'' = C_2 + C_3$.

Se podría pensar que es siempre posible elegir las primas n_i de tal forma que encontremos siempre un sistema completamente equilibrado. Esta afirmación es incierta, como se puede poner de manifiesto sin más que hacer, en el ejemplo anterior, $u_1=u_2=1$; $u_3=2$. Entonces, se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1 p + \pi_2 p \\ \pi_2 &= \pi_1 q + \pi_3 p \\ \pi_3 &= \pi_2 + \pi_3 q \end{aligned} \right\} \text{ que nos da } \begin{cases} \pi_1(p) = p^2/(1-p-p^2) \\ \pi_2(p) = (p-p^2)/(1-p-p^2) \\ \pi_3(p) = (1-2p+p^2)/(1-p-p^2) \end{cases}$$

Aquí es claramente imposible que se produzca una igualdad entre $I(p)$ y $U(p)$ para todo p . No se produce, por tanto, en este sistema una situación de equilibrio completo.

Para el caso general, tendremos que, para cualquier conjunto de reglas u_i y v_i , hay siempre una matriz de probabilidades de transición correspondiente a una cadena de Markov. Las probabilidades de equilibrio $\pi_i(p)$ se pueden determinar como funciones de la probabilidad de riesgo p . Podemos entonces elegir las primas n_i de tal forma que se produzca siempre, de una manera exacta o aproximada, una igualdad entre las funciones $U(p)$ e $I(p)$.

Intimamente relacionados con estos planteamientos de Grenander están los de Fréchet (1), Vajda (2) y Franckx (3), a los que nos referimos con una cierta detención al tratar el tema de la distribución del número de siniestros como un proceso estocástico, en concreto como un proceso de Markov.

- (1) Fréchet, M.: Essai d'une étude de succession de sinistres considérés comme processus stochastiques. Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaires Français n° 27. Junio, 1959. Pag. 67-85
- (2) Vajda, S.: Markov Chains and the determination of fair premiums. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. III. Julio, 1967. Pag. 265-268
- (3) Franckx, Ed.: Théorie du Bonus. Consequences de l'étude de tr. le Professeur Fréchet. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. III. Abril, 1960. Pag. 113-122

En términos parecidos de definición de un sistema de tarificación bonus-malus como una cadena de Markov a los de estos autores, y en concreto a la modelización de Franckx, está el importante trabajo del finés Loimaranta (1), quien comienza, en términos absolutamente análogos a los expresados por Ragnar Norberg, en el trabajo que anteriormente reseñamos, por definir un sistema bonus-malus como un sistema de tarificación "experience rating" caracterizado por los siguientes elementos:

- 1/ Todas las pólizas de un grupo de riesgo dado pueden clasificarse en un número finito de clases, de forma tal que la prima de una póliza dependa únicamente de la clase a que pertenezca en un periodo dado.
- 2/ La clase a que está asignada una póliza depende sólo de la clase a que perteneciera en el periodo anterior, y del número de siniestros ocurridos en ese periodo.
- 3/ Existe una última clase formada por las pólizas sin siniestralidad alguna, durante un periodo de tiempo suficientemente largo.
- 4/ Entenderemos por reglas de Bonus aquellas que indican la nueva clase a la que una póliza pasa a pertenecer, una vez conocida la anterior y el número de siniestros. Simbólicamente se representará por $T_k(i) = j$, que indica que la póliza pasa de la clase i a la clase j después de que se hayan producido k siniestros.
- 5/ Las escalas de bonus indican las primas b_i correspondientes a la clase i . Vectorialmente será B , vector de componentes $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots$.

(1) Loimaranta, K.: Some asymptotic properties of bonus systems. The Astin Bulletin. Vol. VI, Part. 3. Mayo, 1972. Pag. 233-245

La transformación T_k puede escribirse en forma matricial de la siguiente forma:

$$T_k = \{t_{ij}^{(k)}\}, \text{ donde } t_{ij}^{(k)} = 1, \text{ si } T_k(i) = j \quad (1)$$

y en otro caso, $t_{ij}^{(k)} = 0$. Obviamente se cumple que:

$$t_{ij}^{(k)} \geq 0; \quad \sum_j t_{ij}^{(k)} = 1 \quad (2)$$

LLamando λ a la frecuencia de siniestralidad, y $P_k(\lambda)$ a la distribución del número de siniestros (cuyo valor probable es λ) para un período determinado, y asumiendo la hipótesis de independencia de λ y $P_k(\lambda)$ respecto al tiempo, podemos poner:

$$P_{ij}(\lambda) = \sum_k P_k(\lambda) t_{ij}^{(k)} \quad (3)$$

que es la probabilidad de que una póliza pase de la clase i a la clase j en el periodo siguiente. De (2) se deduce que:

$$P_{ij}(\lambda) \geq 0; \quad \sum_j P_{ij}(\lambda) = 1 \quad (4)$$

La matriz:

$$M(\lambda) = \{P_{ij}(\lambda)\} = \sum_k P_k(\lambda) T_k \quad (5)$$

es, por tanto, la matriz de transición de una cadena de Markov. Teniendo presente la característica 3/ del sistema y siendo S la última clase, resulta:

$$T_k^n(i) = S \quad (6)$$

para $n \geq n_1$. Como el número de clases es finito, la ecuación (6) es válida para $n \geq n_0$, donde $n_0 = \max(n_1)$. Como la probabilidad de cero siniestros es positiva, $P_0(\lambda) > 0$, la probabilidad de pasar de la clase i a la clase j durante el período n_0 será: $P_{ij}^{(n_0)} \geq P_0^{(n_0)} > 0$, que, como se sabe, es condición suficiente dentro de la teoría de las cadenas de Markov para que se presente el "proceso regular". Las cadenas Markovianas regulares satisfacen la condición:

$$A = AM; \quad \sum_i a_i = 1 \quad (7)$$

siendo $A = \{a_i\}$ el vector fila $A = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$. Los valores a_i indican la probabilidad de que la póliza esté en la clase i cuando el número de periodos tiende a infinito, $n \rightarrow \infty$. Si $X_i^{(n)}$ es

prima que tiene que pagar un asegurado durante n periodos, empezando en la clase i , se trata de una variable estocástica al depender de siniestros futuros, por lo que, de acuerdo con la teoría de las cadenas de Markov, sus parámetros principales son:

$$\left. \begin{aligned} E\{X_i^{(n)}\} &= bn + g_i + \epsilon_{i,n} \\ \sigma^2\{X_i^{(n)}\} &= \sigma^2n + c_i + \epsilon_{i,n} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

tal que $\epsilon_{i,n}$ converge exponencialmente a cero con n . La distribución de $X_i^{(n)}$ es asintóticamente normal si $\sigma^2 \neq 0$. De aquí se desprende que el valor límite de la prima por periodo es " b ", llamada "prima media", que es independientemente de la clase inicial i , y calculada la expresión:

$$b = \sum_i a_i b_i = AB \quad (9)$$

La parte restante de la ecuación (8), $g_i + \epsilon_{i,n}$, es el valor esperado del "exceso de prima" que el asegurado debe pagar por pertenecer inicialmente a la clase i . Su valor límite, g_i , se denomina "exceso de prima" de la clase i , el cual satisface la ecuación de recurrencia:

$$g_i = b_i - b + \sum_j P_{ij} g_j \quad (10)$$

o vectorialmente: $G = B - bJ + MG$; $\sum_i a_i g_i = 0$, siendo $G\{g_i\}$, y j un vector cuyas componentes son la unidad. El valor límite de la varianza es:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + e \sum_i a_i b_i (g_i - b_i + b) \quad (11)$$

$$\text{con } \sigma_0^2 = \sum_i a_i (b_i - b)^2 \quad (12)$$

que es la varianza correspondiente a la prima de un periodo. Como puede observarse, tanto la prima media como el exceso de prima y las desviaciones respecto a la media dependen de la frecuencia λ .

Eficacia del Bonus.— K. Loimaranta también ha analizado cómo se puede apreciar si el sistema de tarificación funciona apropiadamente, es decir, si la prima se adapta adecuadamente a la verdadera siniestralidad de los riesgos. En un buen sistema de bonus, la prima media, $b(\lambda)$, es una función creciente de λ , y por tanto,

idealmente, sería proporcional a λ , $b(\lambda) = \lambda \bar{c}$. Por esta razón, el autor propone como coeficiente para medir la eficacia del sistema, la expresión:

$$\eta = - \frac{\lambda}{b} \frac{db}{d\lambda} = \frac{d \log b}{d \log \lambda} \quad (13)$$

Para que el sistema sea aceptable, deberá cumplir que $\eta \geq 0$, y en el supuesto de un sistema ideal, $\eta=1$, limitándonos pues al intervalo $0 \leq \eta \leq 1$. Como puede observarse, este coeficiente mide la elasticidad del sistema de tarificación a los cambios en la siniestralidad, y nos parece una de las aportaciones más interesantes a este tema. Para calcular η , necesitamos obtener:

$$\frac{db}{d\lambda} = \sum_i \frac{da_i}{d\lambda} b_i$$

Las ecuaciones que contienen las derivadas $da_i/d\lambda$ se obtienen derivando (7), dando como resultado:

$$\frac{dA}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda} M + A \frac{dM}{d\lambda}; \quad \sum_i \frac{da_i}{d\lambda} = 0 \quad (14)$$

La matriz $\frac{dM}{d\lambda}$ sería, en el caso de que $P_k(\lambda)$ correspondiera a una a una distribución de Poisson,

$$\frac{dM}{d\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (T_{k+1} - T_k)$$

y se resuelve el sistema de ecuaciones lineales (14). El valor de η tiende a cero cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Si $b(0) > 0$, entonces $\eta \rightarrow 0$ también cuando $\lambda \rightarrow 0$. En conclusión, podemos afirmar que la eficacia del sistema bonus-malus es en general positiva para todos los valores de λ en el intervalo $(0, \infty)$; su aplicación, sin embargo, está limitada al intervalo $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ para $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < \infty$. A su vez, si λ_0 es el coste medio por siniestro, entonces, integrando la ecuación (13) para λ_0 como valor inicial, tendremos:

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \lambda V e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} 1-\eta(\lambda) d \log \lambda}, & \lambda \leq \lambda_0 \\ b(\lambda) &= \lambda V e^{\int_{\lambda}^{\lambda_0} 1-\eta(\lambda) d \log \lambda}, & \lambda \geq \lambda_0 \end{aligned} \quad (17)$$

Si $\eta(\lambda) < 1$, las integrales de los exponentes son positivas. Entonces, $b(\lambda) > \lambda \bar{c}$ para $\lambda < \lambda_0$ y $b(\lambda) < \lambda \bar{c}$ para $\lambda > \lambda_0$. La solución λ_0 es, entonces, única, y constituye el valor central de λ para el grupo de riesgo, el cual verifica la igualdad entre la prima media neta $b(\lambda)$ y la prima pura $\lambda \bar{c}$.

Finalmente, Loimaranta trata el problema de que se produzcan excesivas variaciones en la prima de un periodo para otro, lo cual va en contra del principio de seguridad económica del seguro. Por tanto, al escoger la escala del Bonua es conveniente buscar aquélla que dé menor valor a la desviación cuadrática de la media de la prima de un periodo σ_0^2 , conocidos b y η . Se trata, en definitiva, de hallar el mínimo de: $\sigma_0^2 = \sum_i a_i (b_i - b)^2$ con las condiciones: $\sum_i a_i b_i = b$;

$\sum_i (da_i/d\lambda) b_i = db/d\lambda = \text{Cte}$, cuya solución es:

$$b_i = b + c_2 \frac{1}{a_i} \frac{da_i}{d\lambda}. \text{ Haciendo: } \beta_i = \frac{\lambda}{a_i} \frac{da_i}{d\lambda} \quad (18)$$

se observa que toda transformación lineal: $b_i = b + c\beta_i$ (19) es una solución del problema del mínimo para algunos valores de b y $db/d\lambda$. Al sistema cuyas primas toman esta forma se le denomina "escala de mínima varianza". La prima media para la solución (19) es, naturalmente, "b", y las derivadas serán:

$$\frac{db}{d\lambda} \sum_i \frac{da_i}{d\lambda} b_i = c\lambda \sum_i \frac{1}{a_i} \left(\frac{da_i}{d\lambda} \right)^2$$

ambién se puede calcular: $\sigma_0^2 = \sum_i a_i (b_i - b)^2 = c^2 \lambda^2 \sum_i \frac{1}{a_i} \left(\frac{da_i}{d\lambda} \right)^2$

ue, haciendo:

$$d^2 = \sum_i a_i \beta_i^2 = \lambda^2 \sum_i \left(\frac{1}{a_i} \right) \left(\frac{da_i}{d\lambda} \right)^2$$

os queda, para las primas resultantes de la ecuación (19),

$$\frac{db}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda} d^2$$

$$\sigma_0^2 = c^2 d^2$$

$$\eta = c \frac{d^2}{b} = d \frac{\sigma_0}{b}$$

Como vemos, la eficacia del sistema es el producto de dos factores: la varianza relativa, σ_o/b , y un factor "d" que no depende de la escala de bonus, y que para Loimaranta mide el "poder de discriminación de las reglas del bonus". Ahora bien, partiendo de una escala de bonus arbitraria cuyas primas sean: $b_i = b + e\beta_i + h_i$, tal que h_i sea de media cero y ortogonal al vector β , para lo cual se cumplirá que:

$$c = \frac{1}{d^2} \sum_i \alpha_i \beta_i b_i = \frac{\lambda}{d^2} \frac{db}{d\lambda} = \frac{nb}{d^2}$$

Análogamente, podemos poner:

$$\sigma_o^2 = \frac{1}{d^2} (nb)^2 + \sum_i a_i h_i^2,$$

lo cual origina que: $\eta^2 = \frac{d^2}{b^2} (\sigma_o^2 - \sum_i a_i h_i^2)$, de donde:

$$\eta \leq d \frac{\sigma_o}{b}$$

es decir, la ecuación (19) nos proporciona las primas " b_i " que dan la máxima eficiencia al sistema bonus-malus.

Los planteamientos de Norberg, Grenander, Loimaranta, etc. que hemos venido desarrollando contribuyen a una adecuada comprensión del sistema de tarificación bonus-malus que estamos analizando. En aras a que esa comprensión sea mayor, parece oportuno presentar el estudio que sobre dicho sistema efectúa Ubaldo Nieto de Alba en sus "Apuntes de Matemática Actuarial" (1). El estudio de Ubaldo Nieto es del mayor interés porque, a través de él, y mediante la técnica bayesiana, se logra la presentación científica del sistema, que se clarifica a través de un ejemplo, y que, posteriormente, puede aplicarse en la práctica mediante la definición de escalas de bonus, como las que de Norberg y Grenander hemos visto pero que tienen su sistema científico en los planteamientos que pasamos a analizar.

(1) Nieto de Alba, Ubaldo: Apuntes de Matemática Actuarial. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Madrid, 1971.

Consideremos la cartera total dividida en una serie de clases homogéneas, y analicemos una cualquiera de dichas clases. Supongamos que la distribución del número de siniestros, n , en el intervalo temporal $(0, t)$ y dentro de la clase considerada, es binomial negativa, es decir, con función de cuantía:

$$P_n(t) = \binom{-mh}{n} \left(\frac{-t}{t+h} \right)^n \left(\frac{h}{t+h} \right)^{mh}$$

donde t es el periodo de observación, h el coeficiente de heterogeneidad de la clase considerada, siendo el número probable de siniestros en $(0, t)$, mt , y la varianza $mt(1+t/h)$. Consideremos que dicha distribución binomial negativa de $P_n(t)$ es generada por la distribución de Poisson compuesta:

$$P_n(t) = \int_0^\infty P(n/t\lambda) dU(\lambda)$$

donde $P(n/t\lambda) = \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-t\lambda}$ es la distribución de Poisson.

simple de parámetro $t\lambda$, siendo $t\lambda$ la media de siniestros en el periodo de longitud t y siendo λ el parámetro aleatorio cuya función de distribución $U(\lambda)$ nos traduce la heterogeneidad con la que se distribuye λ entre los distintos grupos de la clase considerada, función a la que se denomina función de estructura de los grupos homogéneos. Al suponer nosotros que la distribución $P_n(t)$ es binomial negativa, estamos suponiendo que la función de estructura $U(\lambda)$ es una distribución del Tipo III de Pearson, es decir,

$$dU(\lambda) = \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \lambda^{mh-1} e^{-h\lambda} d\lambda \quad \text{para } \lambda > 0$$

de donde, como se tuvo ocasión de demostrar al analizar la distribución binomial negativa, se obtendrá:

$$P_n(t) = \int_0^\infty P(n/t\lambda) dU(\lambda) = \int_0^\infty \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-t\lambda} \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \lambda^{mh-1} e^{-h\lambda} d\lambda =$$

$$= \binom{-mh}{n} \left(\frac{-t}{t+h} \right)^n \left(\frac{h}{t+h} \right)^{mh}$$

Transcurridos t años se procede a una partición de la clase homogénea (a priori) considerada por subclases, según sea el número de siniestros que en esos t años se hayan producido. Es decir, consideraremos que, transcurridos t años, todas las pólizas que hayan tenido n siniestros constituyen una subclase de la clase considerada. Establecida esta clasificación, en función de la experiencia de siniestralidad (número de siniestros) disponible nos interesará conocer la distribución (a posteriori) $f(t\lambda/n)$, distribución a través de la cual ajustaremos la prima para esa subclase, con arreglo a la siniestralidad (número de siniestros observado en la misma, por medio del valor probable de dicha distribución, $E(t\lambda/n)$.

Aplicando la fórmula definida en el Teorema de Bayés, se obtendrá la siguiente distribución a posteriori.

$$f(t\lambda/n) = \frac{U'(\lambda) P(n/t\lambda)}{P_n(t)}$$

que, dado que $P_n(t)$ es una distribución binomial negativa y $U(\lambda)$ es del tipo III de Pearson, será:

$$\begin{aligned} f(t\lambda/n) &= \frac{\frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \lambda^{mh-1} e^{-h\lambda} \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-t\lambda}}{\left(\frac{-mh}{n} \right) \left(\frac{-t}{t+h} \right)^n \left(\frac{h}{t+h} \right)^{mh}} = \\ &= \frac{(t+h)^{mh+n}}{\Gamma(mh+n)} \lambda^{mh+n-1} e^{-\lambda(t+h)} \end{aligned}$$

distribución a posteriori que es, así mismo, del tipo III de Pearson, es decir, una distribución gamma con parámetros, $\gamma(mh+n, t+h)$ mientras que la distribución a priori era una distribución gamma de parámetros $\gamma(mh, h)$.

La media a posteriori, será:

$$E(t\lambda/n) = \frac{n+mh}{t+h} = m \left(\frac{h+n/h}{h+t} \right) = m \cdot k(t, n, h,)$$

en donde $k(t, n, h)$ es el elemento que va rectificando la prima a priori, dado que tal es \underline{m} , valor probable de la distribución a priori, La varianza de la distribución a posteriori será:

$$V(t\lambda/n) = \frac{n+mh}{(h+t)^2}$$

donde la varianza de la distribución a priori era m/n .

El proceso de la transformación de la distribución a priori (válida para toda la clase homogénea) a la distribución a posteriori (para la subclase de \underline{n} siniestros) a través de la función de verosimilitud $P(n/t\lambda)$, puede esquematizarse a través de la siguiente matriz de datos:

	Función de probabilidad	Media	varianza
Distribución a priori	$U'(\lambda) = \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \lambda^{mh-1} e^{-h\lambda}$	m	m/n
Función de verosimilitud	$P(n/t\lambda) = \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-t\lambda}$	$t\lambda$	$t\lambda$
Distribución a posteriori	$f(t\lambda/n) = \frac{(t+h)^{mh+n}}{\Gamma(mh+n)} \lambda^{mh+n-1} e^{-\lambda(t+h)}$	$\frac{mh+n}{t+h}$	$\frac{mh+n}{(t+h)^2}$

Las conclusiones actuariales fundamentales de la expresión:

$$E(t\lambda/n) = m k(t, n, h), \text{ siendo } k = \frac{h+n/m}{h+t}$$

correspondiente a la media de la distribución a posteriori, son las siguientes:

1º/ \underline{m} es la media de siniestralidad de una clase homogénea a priori B.

2º/ $E(t\lambda/n)$ es la media de siniestralidad en una subclase B_1 de B, $B_1 \subset B$, formada por aquellas pólizas que han sido objeto de \underline{n} siniestros durante el periodo temporal $(0, t)$.

3º/ \underline{h} es el parámetro que traduce y cuantifica la heterogeneidad en la clase B.

4º/ $k(t, n, h)$ es el elemento que va rectificando la prima a priori para los elementos de la subclase B_1 , y que depende, además del coeficiente de heterogeneidad h , del número de siniestros producidos en la subclase, n , y del tiempo transcurrido, t .

A partir de la expresión de la media a posteriori, $E(t\lambda/n)$, que acabamos de analizar, surge el tema del análisis de las carteras, o bien, del análisis de las clases homogéneas a priori en que está dividida una cartera en una tarificación por clases, en términos de homogeneidad o heterogeneidad de la respectiva clase o cartera. Y, en este sentido, podemos diferenciar dos casos fundamentales, según sean los valores del coeficiente de heterogeneidad, h :

A/ Cartera (o clase) homogénea: Cuando $h \rightarrow \infty$, la clase B será homogénea (la distribución binomial negativa tenderá a una distribución de Poisson simple), y no estará justificado el Bonus-Malus. En efecto, tendríamos:

$$E(t\lambda/n) = m \left(\frac{h+n/m}{h+t} \right) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} m$$

para cualquier valor de t (número de años transcurridos) y cualquier n (número de siniestros ocurridos en la subclase B_1), es decir, la media a posteriori tiende a coincidir con la media a priori, por lo que no procede modificación alguna de las tarifas inicialmente aplicadas, es decir, no procede la aplicación de un sistema Bonus-Malus.

B/ Cartera (o clase) heterogénea: Cuando el coeficiente de heterogeneidad h se hace pequeño, $h \rightarrow 0$, la clase será muy heterogénea y la media a posteriori correspondiente a la subclase B_1 , será:

$$E(t\lambda/n) = m \left(\frac{h+n/m}{h+t} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{n}{t}$$

es decir, no dependerá de la media a priori m) de la clase. En este caso, dada la heterogeneidad de dicha clase o cartera, procede tarificar con arreglo a la ex-

periencia propia de la subcartera o subclase B_1 . Así mismo, la varianza:

$$V(t\lambda/n) = \frac{n+mh}{(h+t)^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{n}{t^2}$$

que no depende de m .

La media a posteriori $E(t\lambda/n)$ de la subcartera B_1 con n siniestros en el período temporal de longitud t , admite los siguientes desarrollos:

$$E(t\lambda/n) = \frac{n+mh}{t+h} = \frac{h}{t+h} m + \frac{t}{t+h} \left(\frac{n}{t} \right) = (1-Z) m + Z \bar{X}$$

donde $t/(t+h) = Z$, m es la media a priori de la clase y $\bar{X} = n/t$ es la media muestral de siniestralidad en la clase (número medio de siniestros ocurridos a lo largo de t años), que incorpora la información muestral sobre la siniestralidad en la cartera. El parámetro $Z = t/(t+h)$ está acotado superior e inferiormente, $0 \leq Z \leq 1$, y verifica: $Z \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$ (cartera homogénea); $Z \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$ (cartera hetero-

génea) por lo que puede ser denominado grado de aceptabilidad o credibilidad de la muestra o de la información a posteriori, en función de la mayor o menor heterogeneidad de la cartera. En el caso en que $Z = 0$ (credibilidad o aceptabilidad nula), $E(t\lambda/n) = m$, media a priori de la clase, que no sufre modificación alguna por la información de que se han producido n siniestros en t años, y en el caso de que $Z = 1$ (credibilidad plena), se tendrá:

$E(t\lambda/n) = \bar{X} = n/t$, media muestral, que no depende de la media a priori. Este esquema de descomposición de la medida analizada en dos partes, una correspondiente a la información a priori y la otra a la información a posteriori, en función de los valores de un parámetro acotado $Z (0 \leq Z \leq 1)$ es el característico de la Teoría de la Credibilidad, que analizaremos posteriormente.

Veamos un ejemplo de aplicación de este sistema Bonus-Malus. Consideremos una cartera total de 23.589 vehículos de una determinada característica (clase homogénea), que, después de un año, presentaba los siguientes resultados de siniestralidad:

N° de siniestros (x)	N° de vehículos (n)	<u>Distribución ajustada</u>	
		Poisson	Binomial negativa
0	20.592	20.439	20.607
1	2.651	2.978	2.617
2	297	212	320
3	41	0	40
4	7	0	0
5	0	0	0
6	1	10	5
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	23.589	23.589	23.589

Calculado el índice de desviaciones, I_d , para ambos ajustes, se obtiene:

Poisson: $I_d \approx 157$

Binomial negativa: $I_d \approx 3$

Al nivel de significación del 5%, y con 5 (para Poisson) y 4 (para la binomial negativa) grados de libertad, respectivamente, se tiene:

$$P(\chi^2_5 > 11,07) = 0,05, \text{ con 5 g. l. (Poisson)}$$

$$P(\chi^2_4 > 9,488) = 0,05, \text{ con 4 g. l. (Binomial negativa).}$$

Así pues, al nivel de significación del 5% se rechaza el ajuste de Poisson y se acepta el de la distribución binomial negativa.

La estimación de los parámetros en dicha distribución se puede hacer de la siguiente forma:

$$m^* = \bar{x} = 0,144$$

$$\sigma^{2*} = S^2 = \bar{x} \left(1 + \frac{1}{h}\right) \quad \text{de donde } h = \frac{\bar{x}}{S^2 - \bar{x}}$$

En efecto, recordemos que cuando analizamos la distribución binomial negativa, que tenía por función de cuantía:

$$P(\xi=r/m.h) = \binom{-mh}{r} \left(\frac{1}{1+h}\right)^r \left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh} \quad \text{para } r=0,1,2,\dots$$

y por función característica: $\phi_{\xi}(t) = \{1 - (e^{it} - 1)/h\}^{-mh}$, los parámetros de dicha distribución resultaban ser:

$$\text{Media: } E(\xi) = m$$

$$\text{Varianza: } V(\xi) = m \left(1 + \frac{1}{h}\right)$$

Así pues, si, siguiendo el principio de analogía en la estimación tomamos por estimador de la media poblacional a la media muestral, $m^* = \bar{x}$, y por estimador de la varianza poblacional a la varianza muestral, $\sigma^{2*} = S^2$ (a pesar de ser un estimador sesgado) tendremos:

$$m^* = \bar{x}$$

$$\sigma^{2*} = \left\{m \left(1 + \frac{1}{h}\right)\right\}^* = S^2$$

de donde, tomando $S^2 = \bar{x} \left(1 + \frac{1}{h}\right)$, al ser \bar{x} el estimador de m , nos resulta:

$$h = \frac{\bar{x}}{S^2 - \bar{x}}$$

estimación del coeficiente de heterogeneidad de la cartera que nos dará el valor numérico:

$$h = \frac{0,144}{0,1689 - 0,144} = 5,78$$

Así pues, tenemos los siguientes valores: $m^* = 0,144$; $h = 5,78$. En el supuesto de que el coste medio por siniestro sea independiente del número de siniestros, y que ascienda a: $\bar{c} = 5.000$ pesetas, la prima inicial (prima pura sin recargo adicional) resultaría ser:

$$P = 5000 \times 0,144 = 720 \text{ pesetas.}$$

Después de transcurridos t años, todas las pólizas que han sufrido n siniestros constituyen una subcartera (subclase) con la siguiente media (a posteriori) de siniestros:

$$E(t\lambda/n) = m \frac{h+n/m}{h+t}$$

con arreglo a los datos numéricos del ejemplo, tendremos:

$$\text{Prima inicial..... } P_0 = \bar{c} m = 720 \text{ pesetas.}$$

$$\text{Primas sucesivas... } P(t/n) = \bar{c} m \frac{h+n/m}{h+t} = P_0 k(t,n,h)$$

En el cuadro siguiente aparecen las pirms sucesivas (y, en consecuencia, los bonus-malus) para una prima inicial de 100 unidades monetarias, es decir, definidas a través de la fórmula:

$$P(t/n) = 100 \frac{5,78+n/0,144}{5,78+t}$$

n \ t	1	2	3	4	5	6	7	8
0	85,07	74,02	65,51	58,76	53,61	49,06	45,22	41,9
1	188,05	163,63	144,82	129,89	117,99	107,97	99,60	92,3
2	291,04	253,24	224,13	201,03	182,37	166,87	153,83	145,9
3	395,52	342,85	303,44	272,16	246,87	225,91	208,23	193,1

Aunque pueda parecer que son muy fuertes los bonus-malus, ello se debe a que la media de siniestros es baja (0,144), es decir, que, aproximadamente, se produce un siniestro cada 7 años. D ahí que para $n=1$ y $t=7$, la prima sucesiva sea prácticamente la prima inicial.

Seal (1) ha profundizado en estos planteamientos, mediante el análisis de la probabilidad de que una póliza con valor del parámetro de riesgo invariante en el tiempo sufre \underline{l} siniestros durante un periodo de longitud \underline{s} , siguiente a un periodo de longitud \underline{t} durante el cual se han producido \underline{n} siniestros. Tal probabilidad resulta ser:

$$P_{l/n}(s/t) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\lambda(t+s)} \frac{(\lambda t)^n (\lambda s)^l}{n! l!} dU(\lambda)}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dU(\lambda)}$$

(1) Seal, Hilary L.: Stochastic Theory of a Risk Business. John Wiley & Sons, 1969. Pag. 65

Siendo L la variante correspondiente, el valor probable de la misma será:

$$E(L, s/n, t) = \sum_{l=0}^{\infty} l P_{l/n}(s/t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t+s)} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dU(\lambda).$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(\lambda s)^{l-1}}{P_n(t)} = \frac{s}{t} (n+1) \frac{P_{n+1}(t)}{P_n(t)}$$

Este valor probable es una función creciente de n y decreciente de t , y determina a $U(\lambda)$ unívocamente. Es una función lineal de n sólo si $U(\lambda)$ es del tipo III de Pearson.

Si al valor probable a posteriori de la cartera, que hemos venido representado por $E(t\lambda/n)$, cuando se han producido n siniestros en un periodo de longitud t , lo representamos, siguiendo a Seal, por $E(\Delta/n, t)$, tendremos:

$$E(\Delta/n, t) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dU(\lambda) = \frac{n+1}{t} \frac{P_{n+1}(t)}{P_n(t)} = E(L, s/n, t)/s$$

Lundberg llama a esta función $E(L, s/n, t)$, "función de intensidad" (intensity function). Cuando $t \rightarrow \infty$, $E(L, s/n, t)$ tiende a ser s veces el "verdadero" valor del parámetro λ . Si $U(\lambda)$ es una distribución gamma de parámetros $\gamma(m, c)$,

$$U'(\lambda) = \frac{c^m}{\Gamma(m)} e^{-c\lambda} \lambda^{m-1}, \quad c, m > 0, \quad 0 < \lambda < \infty$$

tal que $E(\Delta) = m/c$ y $V(\Delta) = m/c^2$, y siendo

$$U'(\lambda/n, t) = \frac{(c+t)^{m+n}}{\Gamma(m+n)} e^{-\lambda(c+t)} \lambda^{m+n-1}$$

on $E(\Delta/n, t) = (m+n)/(c+t)$ y $V(\Delta/n, t) = (m+n)/(c+t)^2$

e verificará:

$$\frac{E(\Delta/n, t)}{E(\Delta)} = \frac{1+n/m}{1+t/c} \equiv M(n, t)$$

habiendo obtenido Bichsel en 1964 una tabla de esta función $M(n,t)$ para distintos valores de n , $n=0,1,2,\dots$, y distintos valores de t , $t=1,2,3,\dots$, tabla que muestra como la prima inicial se va modificando en función de la experiencia de la que se va disponiendo. En particular, si $n=0$, el multiplicador de la prima inicial es $(1+t/c)^{-1}$, como han puesto de manifiesto Hewitt (1) y el propio Bichsel (2).

Delaporte (3) llama a $E(L,1/n,t)$ "prima modelada sobre el riesgo" ("la prime modelée sur le risque", y ha hecho un número de ilustraciones de la siguiente teoría, basada en los datos de accidentes de automóviles en Francia y en la hipótesis de que $U(\lambda)$ es una distribución gamma. Ha propuesto una medida de la eficiencia del método en comparación con el uso de $E(\Delta)$, pero Lundberg(4) considera que un índice mejor es el ratio de la media condicional de L en el tiempo t , siendo los ponderadores $P_n(t)$, a la varianza inicial antes de que se hayan realizado las observaciones.

- (1) Hewitt, C.C., Jr.: The Negative Binomial applied to the Canadian Merit Rating Plan for Individual Automobile Risks. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, nº 47. 1960. Pag. 55-65
- (2) Bichsel, F.: Une méthode pour calculer une ristourne adéquate pour années sans sinistres. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. III, Abril, 1960. Pag. 106-112
- (3) Delaporte, Pierre J.: Tarification du risque individuel d'accidents d'automobiles par la prime modelée sur le risque. The Astin Bulletin. Vol. III, Part. III, Abril, 1965. Pag. 251-
- (4) Lundberg, Ove: Une note sur des systemes de tarification basés sur des modèles du type Poisson composé. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. I. Enero, 1966. Pag. 49-58

En orden a aplicar el método a la práctica, Delaporte propuso el siguiente proceso:

- 1/ La póliza debería contener una tabla de multiplicadores $M(n,t)$, a partir de la fórmula: .

$$\frac{E(\Delta/n,t)}{E(\Delta)} = \frac{1+n/m}{1+t/c} \equiv M(n,t)$$

- 2/ Debido al peligro de que los grandes valores de M conduzcan a una cancelación de la póliza por parte del asegurado, se debería modificar a $M'(n,t)$, de tal forma que la prima media resulte no alterada, es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M(n,t) P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} M'(n,t) P_n(t) P(M') \geq \sum_{n=0}^{\infty} M(n,t) P_n(t) P(M)$$

donde $P(M)$ es la probabilidad de que la prima sea pagada si el multiplicador adopta el valor M ; por ejemplo, si la experiencia ha revelado una cancelación media de vez y media la prima uniforme inicial,

$$P(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } M < 1,5 \\ 0 & \text{si } M \geq 1,5 \end{cases}$$

- 3/ En orden a obtener una prima competitiva para el primer año, se podría establecer, digamos, $0,85 E(\Delta)$ en lugar de $E(\Delta)$, y el 15% de pérdidas iniciales se podría recuperar a lo largo de los siguientes cuatro años, por ejemplo.

Pesonen, en su trabajo "A numerical method of finding a suitable bonus scale", que hemos reseñado anteriormente, propone que, en vez de agregar los números de siniestros ocurridos durante un periodo de t años, basarse en la estimación del parámetro λ sobre la "clase de dividendo" (dividend class) $Z(t)$, que depende sólo de $\{i_t\}$, el conjunto de indicadores i_t ($t=1,2,\dots,t$) de años sin siniestros, donde i_t es la unidad si no hay siniestros en el año t , y cero si se produce uno o más siniestros en dicho año. Estamos entonces interesados en calcular $E(\Delta/z(t))$, y representemos por $P(z/i)$ el número proporcional de caminos de encontrar clases de dividendos z con i años libres de siniestros, es decir:

$$\sum_z P(z/i) = 1, \text{ siendo } i = \sum_{\tau=1}^t i_{\tau}$$

Consideremos sólo el caso particular de que $U(\lambda)$ es una distribución gamma,

$$U'(\lambda) = \frac{c^m}{\Gamma(m)} e^{-c\lambda} \lambda^{m-1}, \quad c, m > 0, \quad 0 < \lambda < \infty$$

Entonces:

$$U'(\lambda/z(t)) = \frac{\sum_{i=0}^t P(z/i) \binom{t}{i} e^{-\lambda i} (1-e^{-\lambda})^{t-i} U'(\lambda)}{\sum_{i=0}^t P(z/i) \binom{t}{i} \int_0^{\infty} e^{-\lambda i} (1-e^{-\lambda})^{t-i} U'(\lambda) d\lambda}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda i} (1-e^{-\lambda})^{t-i} U'(\lambda) d\lambda &= \sum_{j=0}^{t-i} \binom{t-i}{j} (-1)^j \frac{c^n}{(n)} \int_0^{\infty} e^{-(i+j+c)\lambda} d\lambda \\ &= \sum_{j=0}^{t-i} \binom{t-i}{j} (-1)^j c^{m(i+j+c)-m} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E(\Delta/z(t)) &= \frac{\sum_{i=0}^t \binom{t}{i} P(z/i) \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda i} (1-e^{-\lambda})^{t-i} U'(\lambda) d\lambda}{\sum_{i=0}^t \binom{t}{i} P(z/i) \int_0^{\infty} e^{-\lambda i} (1-e^{-\lambda})^{t-i} U'(\lambda) d\lambda} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^t \binom{t}{i} P(z/i) m \sum_{j=0}^{t-i} \binom{t-i}{j} (-1)^j (i+j+c)^{-m-1}}{\sum_{i=0}^t \binom{t}{i} P(z/i) \sum_{j=0}^{t-i} \binom{t-i}{j} (-1)^j (i+j+c)^{-m}} \end{aligned}$$

Como un ejemplo, consideremos una clasificación de dividendos en cinco clases. El asegurado comienza en la clase más baja, la clase A. Se mueve a una clase más arriba por cada año sin siniestro, hasta que alcanza la clase más alta (con el mayor dividendo la clase E, en la cual permanece hasta que se produce un siniestro. Si el asegurado está más arriba de la clase B, cuando declara uno ó más siniestros en un año, se mueve hasta la clase B para el cálculo de primas del siguiente año. Si se encuentra en la clase B,

cuando se declaran uno o más siniestros, se desplaza hacia la clase A, en la cual permanece si se declaran uno o más siniestros en el siguiente año.

Simple cálculos conducen a los siguientes valores de $P(z/i)$ al final de cinco años:

z	E	E	D	C	B	D	C	B	A	C	B	A	B	A	A
i	5	4				3				2			1		0
$P(z/i)$	1	1/5	2/5	1/5	1/5	1/10	3/10	5/10	1/10	1/10	4/10	5/10	1/5	4/5	1

Si la experiencia acumulada no modifica los parámetros originales, en los cuales suponemos que $m=2$ y $c=1$, entonces el número medio de siniestros por póliza y año es $m/c=2$; el numerador de $(\Delta/z=c)$, por ejemplo, es dos veces

$$(5^{-3}-6^{-3}) + \frac{1}{10}(4^{-3}-2 \times 5^{-3}+6^{-3}) + \frac{10}{10}(3^{-3}-3 \times 4^{-3}+3 \times 5^{-3}-6^{-3})$$

el denominador tiene la misma forma, excepto que el índice de potencia para cada término individual es -2 en lugar de -3 . El resultado es:

$$E(\Delta/c) = \frac{2 \times 0,0256667}{0,0588889} = 0,8717$$

Cálculos similares conducen a: $E(\Delta/A) = 2,4579$

Esto nos indica que, comparado con una prima inicial neta de 2 para todas las pólizas, el individuo que permanece en la clase A al cabo de cinco años deberá pagar una prima de $2,46(E(\Delta/A) = 2,4579 \approx 2,46)$, mientras que un asegurado que se encuentra en la clase C al cabo de dicho periodo, deberá satisfacer sólo $0,87(E(\Delta/C) = 0,8717 \approx 0,87)$. Pesonen sugiere que una adecuada escala de bonus resulta del límite del vector: $\lim_{t \rightarrow \infty} E(\Delta/z(t))$, si tal límite existe. También considera una más general forma de $U(\lambda)$, consistente en una mixtura de distribuciones gamma con m fijo, y muestra como varía $E(\Delta/z(t))$ cuando hay una entrada de nuevos asegurados a un tanto constante de α veces la cartera existente.

Si el sistema de dividendos depende sólo de i , número de años sin siniestros al margen de t , los cálculos son particularmente sencillos. De la expresión

$$U'(\lambda/n, t) = \frac{(c+t)^{m+n}}{\Gamma(m+n)} e^{-\lambda(c+t)} \lambda^{m+n-1}$$

se obtiene que si todos los años han sido sin siniestro, es decir si $i=t$, entonces

$$U(\lambda/0, t) = \int_0^\lambda \frac{(c+t)^{m+n}}{\Gamma(m+n)} e^{-z(c+t)} z^{m-1} dz = P(c+t\lambda, m)$$

en comparación con la inicial función de distribución

$$U(\lambda) = P(c\lambda, m)$$

Un concepto que ha hecho fortuna en el análisis de las bonificaciones es el de "hambre de bonificación" o "sed de bonificación" ("hunger for bonus" o "bonus hunger"), introducido con gran acierto por Philipson en su trabajo "The Swedish System of Bonus" (1). Como acertadamente la define Norberg (2), por "hambre de bonus" se entiende la "tendencia de un asegurado al autoseguro de los pequeños siniestros, en orden a evitar un incremento en la prima factura". Es decir, la tendencia a declarar solamente los siniestros cuya cuantía compense la pérdida de bonificación para el siguiente año. Este efecto psicológico que, en definitiva, es el "hambre de bonus" es un elemento básico para el éxito comercial de las tarifas con bonificaciones. Sobre la mejor estrategia en este sentido por parte de un asegurado, ante un seguro con posibilidad de bonificaciones, es interesante el trabajo de Martin-Löf (3).

(1) Philipson, Carl: The Swedish System of Bonus. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. III. Abril, 1960. Pag. 134-141

(2) Norberg, Ragnar: Credibility Premium Plans Which Make Allowance for Bonus Hunger. Scandinavian Actuarial Journal. 1975. Pag. 73-86

(3) Martin-Löf, Anders: A Method for Finding the Optimal Decision Rule for a Policyholder of an Insurance with a Bonus System. Aktuar. 1973. nº 1. Pag. 23-29

LA BONIFICACION POR AUSENCIA DE SINIESTRO

Como indica Thpepaut (1), "la bonificación por ausencia de siniestro fue implantada por los aseguradores británicos. El seguro inglés del automóvil es, fundamentalmente, un seguro "a todo riesgo". El asegurado inglés paga los daños del no asegurado y no ejerce recurso, normalmente, contra el asegurador del adversario, más que cuando se trata de siniestros importantes. Un acuerdo de compensación denominado "Konck for Konck Agreement") literalmente, "acuerdo de golpe por golpe") resuelve el caso cuando se trata de pequeños daños. El seguro inglés del automóvil es, pues, en la mayoría de los casos, un seguro de daños, es decir, un seguro en el que los pagos de los siniestros se le hacen al asegurado y no a un tercero. Esta concepción facilita mucho la holgura o juego de las cláusulas de franquicias y de bonificación, desde el momento en que no interviene para nada la cuestión de la responsabilidad.

La cláusula de la bonificación inglesa prevé una reducción de un 10% de la prima cuando el asegurado no ha declarado siniestro alguno a su asegurador durante un año de vigencia del seguro".

En las Tarifas vigentes del Seguro Voluntario de Automóviles, en España, aprobadas por O.M. de 11-4-1977 y Resolución de D.G. de S. de 29-5-1978, se establece, referidas a la Modalidad Primera de Seguro de Responsabilidad Civil Suplementaria, las siguientes bonificaciones por no siniestro:

- 10% de bonificación, por dos años sin siniestro, con permanencia en la propia Entidad.
- 20% de bonificación, por tres años sin siniestro, con permanencia en la propia Entidad.
- 30% de bonificación, por cuatro años o más sin siniestro, con permanencia en la propia Entidad.

Ante la importancia del tema de la bonificación por no siniestro, el Institut des Actuaire Français convocó, en Junio de

(1) Thépaut, André: Aspect politique et aspect administratif du Bonus pour non sinistre. Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaire Français n° 27. Junio, 1959. Pag. 125-140

1959, un coloquio en la Baule con el tema monográfico "No claim discount in insurance, with particular reference to Motor business". Fruto de este coloquio y de las comunicaciones científicas presentadas al mismo, se encuentran los cinco trabajos que, sobre este tema, recogió The Astin Bulletin en su Volumen I, Parte III, de Abril de 1960, y que son los siguientes: (1) Bischel, F.: "Une méthode pour calculer une ristourne adéquate pour années sans sinistres" (Pag. 106-112); (2) Franckx, Ed.: "Théorie du bonus" (Pag. 113-122); (3) Martin, D.B.: "Automobile Insurance: Canadian Accident-Free Classification System". (Pag. 123-133); (4) Philipson, Carl: "The Swedish System of Bonus" (Pag. 134-141), y (5) Thyrio Paul: "Contribution a l'étude du bonus pour non sinistre en assurance automobile". (Pag. 142-162). En estos trabajos se perfila de una manera adecuada la teoría de la bonificación por ausencia de siniestros, junto con otras aportaciones, entre las que cabe destacar, de manera significativa, la de Fréchet, titulada "Essai d'une Etude de Succession de Sinistres Considérés come Processus Stochastique", la de Pierre Delaporte titulada "Quèlques problemes de Statistique Mathématique posés par l'Assurance Automobile et le Bonus pour non sinistre", el de Thépaut que hemos reseñado anteriormente, etc. Sobre el importante trabajo de Franckx, "Théorie du Bonus", que, a través de las investigaciones de Fréchet sobre procesos estocásticos y cadenas de Markov, plantea la teoría de la bonificación como una cadena ergódica, ya tuvimos ocasión de analizarlo detenidamente al estudiar la distribución del número de siniestros, como se comentó al comienzo de nuestro estudio sobre el sistema bonus-malus.

Respecto al importante tema del análisis de las ventajas e inconvenientes de la bonificación por no siniestro, recojamos la opinión de Beard (1), para quien "a veces se comenta que la bonificación por no siniestro actúa en la forma de ayudar al buen conductor, pero no es claro que ésto sea así. Ciertamente, el "hambre de bonus" ("bonus hunger") que debe existir en cualquier esquema

(1) Beard, Robert E.: Some observations on no-claim bonus schemes in motor insurance. Memorias del 18º Congreso Internacional de Actuarios. Munich, 1968. Tomo IV. Pag. 345-357

de bonificación, donde la comisión de un accidente, con la correspondiente siniestralidad, da lugar a un inventario de la prima, conducirá a una disminución en el número de siniestros declarados, pero resulta difícil de creer que, en los críticos momentos en que se puede producir un accidente (o no producirse), el asegurado pueda modificar su conducta movida por "reflejos" nerviosos, debido al "hambre de bonificación", excepto, posiblemente, para una muy pequeña proporción de casos". Lo que nos expresa con gran acierto Beard es que una cosa es que la bonificación reduzca el número de declaraciones de siniestro, por criterios económicos de elección de la mejor estrategia cara a obtener el máximo ahorro, o el mínimo coste, y otra es que el número de accidentes realmente producidos sufra una merma fundamental, cosa esta última que Beard pone en duda.

En el análisis de las ventajas e inconvenientes de la bonificación por no siniestro, una aportación importante es la de André Thépaut, en su trabajo "Aspect politique et aspect administratif du Bonus pour non sinistre", que, anteriormente, reseñamos. Las ideas fundamentales de Thépaut son las siguientes:

Las ventajas que se le atribuyen, por lo general, a la cláusula de bonificación por no siniestro son las siguientes:

- 1º/ El asegurado es invitado a conducir prudentemente.
- 2º/ El asegurado que paga una prima de 50 libras esterlinas, por ejemplo, mostrará tendencia a no declarar un siniestro de 4 libras esterlinas, desde el momento que, dada una bonificación por no siniestro del 10%, pierde, al hacerlo, toda posibilidad de recibir una bonificación de 5 libras esterlinas al final del año.

Por otra parte, los aseguradores franceses han imitado tímidamente a sus colegas británicos y han admitido la bonificación por no siniestro en el seguro a todo riesgo, pero la mayoría de ellos siguen sintiéndose profundamente hostiles a su ampliación al seguro de Responsabilidad Civil, y esto por las razones siguientes:

- º/ La bonificación constituye una recompensa concedida a un buen conductor. Ahora bien, la póliza de seguros francesa no asegura a

un conductor, sino a un vehículo, cualquiera que sea la persona que vaya al volante, con la única condición de que se halle en posesión de un permiso reglamentario de conducción. La póliza de seguros cubre, pues, a un grupo de conductores (por ejemplo, una familia), cuya composición varía con el tiempo.

2º/ La frecuencia de las declaraciones de los siniestros es demasiado pobre en el Seguro de Responsabilidad Civil como para que la bonificación adquiera cierto significado, y, por consiguiente, sea eficaz. M. Depoid, en su obra, declara textualmente que el principio de la bonificación no se justifica más que en las categorías de vehículos que presentan una frecuencia de siniestros elevada. Así, por ejemplo, mientras que la frecuencia en un seguro a todo riesgo es, aproximadamente, de 1,50 en París y de 0,75 en cualquiera provincia, la frecuencia en un seguro de responsabilidad civil de los agricultores es de 0,114 solamente. Esto significa que, a grandes rasgos, de 1.000 agricultores, sólo 114 declararán cada año un siniestro, siendo 886 los que no declararán siniestro alguno. Una recompensa de un 10% de la prima concedida a 886 de 100 asegurados no significa nada; se trata, simplemente, de una reducción disfrazada de la prima, de un 8,86%.

3º/ La distribución de la bonificación le ocasiona a la compañía unos gastos generales desproporcionados, si se comparan con la cantidad distribuida.

4º/ La institución de una bonificación deberá ir acompañada de un alza de tarifas, para tener en cuenta el cargo de esa bonificación y el coste elevado de la gestión. Los partidarios de la bonificación no se detienen ante la dificultad que constituye esa elevación o sobre carga indispensable de las tarifas. Proponen compensar la reducciones de las primas originadas en el juego de los bonus con penalizaciones para los casos en que se de una frecuencia anormal en las declaraciones de los siniestros. Sin embargo, mientras que reducciones de las primas son una realidad, las penalizaciones no son sino un señuelo, pues le basta al asegurado amenazado de penalización con cambiar de Compañía para encontrar de nuevo la tarifa normal. El fichero central de los asegurados siniestrados que

se pueda imaginar para detectar a los malos asegurados, además del coste elevado de su establecimiento, no resolvería el problema, puesto que basta con poner en la declaración de siniestro o en el contrato el nombre de un pariente o de un amigo no fichado para beneficiarse de nuevo de la tarifa normal.

5º/ La bonificación resulta muy difícil de aplicar a las pólizas que aseguran flotas de vehículos. Los partidarios de la bonificación dicen que basta con prever una póliza por vehículo, pero consideraciones de orden práctico han obligado siempre a los aseguradores a conservar el sistema de flotas, y, además, en todos los países del mundo.

Y así, Thépaut llega a establecer hasta diez razones para rechazar, al menos en el Seguro de Responsabilidad Civil, la cláusula de bonificación por no siniestro. Es éste un tema abierto, susceptible de múltiples análisis y matizaciones, de las que hemos descrito, con alguna detención, alguna de ellas.

LA PRIMA MODELADA SOBRE EL RIESGO DE DELAPORTE

Lo que Pierre Delaporte ((1) y (2)) llama "prima modelada sobre el riesgo" es un caso particular de "experience rating" en donde cada año se estima el riesgo por la esperanza matemática ligada a la información adquirida.

Teniendo en cuenta la distribución de siniestros $P(n/\lambda)$ y la función de estructura de la clase considerada, $dS(\lambda)$, suponiendo que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son el número de siniestros declarados durante los últimos n años, respectivamente, la prima correspondiente al periodo $n+1$ se estima por

(1) Delaporte, Pierre J.: Tarification du risque individuel d'accidents d'automobiles par la prime modelée sur le risque. The Astin Bulletin. Vol. III, Part. III, Abril, 1965. Pag. 251-271

2) Delaporte, Pierre J.: Un problème de tarification de l'assurance accidents d'automobiles examiné par la statistique mathématique. Memorias del XVIº Congreso Internacional de Actuarios. Bruselas, 1960. Vol. II. Pag. 121-135

$$E(\lambda/\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \frac{\int_0^{\infty} \lambda P(\lambda_1/\lambda) P(\lambda_2/\lambda) \dots P(\lambda_n/\lambda) d S(\lambda)}{\int_0^{\infty} \lambda P(\lambda_1/\lambda) P(\lambda_2/\lambda) \dots P(\lambda_n/\lambda) d S(\lambda)}$$

También considera Delaporte un segundo método de tarificación según experiencia basado en el valor modal de la distribución:

$$K P(\lambda_1/\lambda) P(\lambda_2/\lambda) \dots P(\lambda_n/\lambda) S'(\lambda)$$

Ello supone una jerarquización de la gravedad de los riesgos según el valor más probable. Pero esta forma de proceder no satisface el principio actuarial de equilibrio. Por otra parte, crea una propensión a que los asegurados que tengan que pagar primas más elevadas rescindan sus contratos. Define el coeficiente de eficiencia de la prima media en relación con la prima modelada sobre el riesgo como:

$$C_t = (V_t - V) / (V_0 - V_{\infty})$$

siendo V_t la varianza de los siniestros del t-ésimo año en relación al valor probable $E(\lambda/\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Por otra parte, V_0 es la varianza del primer año, que es la misma tanto para la prima media como para la prima modelada. A medida que el número de años t crece, C_t se hace más pequeño, de tal forma que para $t \rightarrow \infty$, $C_t \rightarrow 0$.

Delaporte demuestra que:

a/ Si el riesgo es estable en el tiempo, la prima modelada tiende a asintóticamente hacia el verdadero valor $\bar{\lambda}$; esta prima límite es independiente de la clasificación inicial del riesgo (prima a *priori*).

b/ Para cada clase de riesgo, la tarificación por la prima modelada presenta una eficiencia máxima (mínima varianza).

Los principales inconvenientes que, a juicio de P. Depoid

(1) presenta este sistema son los siguientes:

a/ Presenta una tendencia a incrementar las franquicias, con objeto de reducir la frecuencia de siniestralidad, ya que entonces habrá bonificaciones reducidas y penalizaciones muy fuertes. El seguro, por tanto, sólo atenderá a los siniestros grandes. Y este pro

(1) Depoid, P.: Applications de la Statistique aux Assurances.

ceso es indispensable para que el asegurador mantenga el equilibrio de sus operaciones; en efecto, en el sistema de la prima modelada, todos los siniestros se consideran iguales entre sí, por lo que un siniestro no declarado puede hacer perder al año siguiente al asegurador una suma muy superior de prima.

b/ Presenta demasiadas fluctuaciones en las primas al cabo de varios periodos, según el año en que ocurran los siniestros.

c/ La hipótesis de estabilidad de las funciones $P(\lambda_i/\lambda)$ no se da en la práctica.

La distribución de Poisson compuesta utilizada por Bischel (1) para el cálculo del extremo de prima por años sin siniestro. En esta trabajo, da Bischel tres razones de proqué elige la distribución gamma como distribución de estructura: a/ La distribución gamma está definida solamente en el campo real positivo; b/ Nos conduce a expresiones simples, y c/ La distribución binomial negativa se ajusta bien a los datos, según el test de la χ^2 . Posteriormente, este mismo autor ha hecho aplicación de la distribución de Poisson compuesta al análisis del sistema de bonus y malus, introducido en Suiza en el año 1963. Llamando q a la frecuencia de siniestros en la cartera B, y $q(n,t)$ a la frecuencia futura de los siniestros de una sub-cartera, que durante t años ha sufrido n siniestros, si b representa el grado de heterogeneidad de la cartera (en nuestras notaciones sería $b=1/n$), entonces se llega a la siguiente expresión:

$$q(n,t) = q \frac{1+n b/q}{1+bt}$$

partir de la cual discute Bischel los distintos casos que se pueden presentar según el grado de homogeneidad de la cartera, dado a través de b .

Gürtler (2) ha analizado las ventajas del sistema basado en el número de siniestros sobre el sistema basado en la ausencia de

1) Bischel, F.: Une méthode pour calculer une ristourne adéquate pour années sans sinistres. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. III, Abril 1960. Pag. 106-112

2) Gürtler, Max: Bonus ou Malus. The Astin Bulletin. Vol. III, Part. I. Diciembre, 1963. Pag. 43-61

siniestros. Como pone de manifiesto Derron (1) Gurtler ha introducido una adecuada medida para analizar la adecuación de una tarifa. Esta medida es la que llama "Error ratio", ER, que representa una relación entre el valor absoluto de todas las diferencias entre la prima oficial (después de deducirle eventuales bonificaciones) y la prima "verdadera", cociente con el total de las primas pagadas después de la deducción de las bonificaciones. Tendremos:

Prima cobrada = prima oficial- bonificaciones obtenidas.

Prima verdadera = " correspondiente a la tasa individual de siniestralidad.

El "error ratio" ER se puede definir entonces de la siguiente forma

$$ER = \frac{\sum | \text{primas cobradas} - \text{primas verdaderas} |}{\sum \text{primas cobradas}}$$

El ER está acotado entre 0 y 1. Si ER=0, se está en presencia del sistema de tarificación ideal, y si ER=1, las primas no corresponden en absoluto al riesgo existente. Una solución óptima se puede entonces definir como el procedimiento de tarificación que minimice el ratio ER.

Otro autor que ha estudiado con profundidad el tema de la bonificación por no siniestro ha sido Thyron ((2) y (3)). Partiendo de la distribución de $X(t)$, coste total de los siniestros, cuya función de distribución es $F(x,t)$, correspondiente a una clase no

(1) Derron, Marcel: A Theoretical Study of the No-Claim Bonus Problem. The Astin Bulletin. Vol. III, Part. I. Diciembre, 1963. Pag. 62-74

(2) Thyron, P.: Etude de la loi de probabilité de la variable "nombre de sinistres" dans l'assurance automobile. Memorias del XVIº Congreso Internacional de Actuarios. Bruselas, 1960. Vol.II. Pag. 25-36

(3) Thyron, P.: Contribution à l'étude du bonus pour non sinistre en assurance automobile. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. III. Abril, 1960. Pag. 142-162

homogénea, es decir, suponiendo que, en términos de probabilidad, los parámetros de que depende $F(x,t)$ son, a su vez, variables aleatorias, y representado por $U(\lambda)$ la función de estructura que traduce la heterogeneidad de la clase, tendremos:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,t) S^{n*}(x), \text{ con } P(n,t) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} d U(\lambda),$$

en donde se ha supuesto que la variable del coste de un siniestro es independiente del tiempo y de la evolución anterior del proceso. El número de siniestros $N(t)$ sigue la ley de probabilidad $P(n,t)$, siendo:

$$E\{X(t)\} = E\{N(t)\} E(y) = t E(\Delta) E(y)$$

siendo y la variable expresiva del coste de un siniestro.

Sea H_α una observación hecha sobre el valor tomado por $N(\alpha)$ en el curso de una experiencia de duración α . Con ello, la función de estructura a priori será:

$$d U(\lambda/H_\alpha) = \frac{P(H_\alpha/\lambda) d U(\lambda)}{P(H_\alpha)}$$

La esperanza matemática a posteriori del número de siniestros es ahora: $E(\Delta/H_\alpha)$, con

$$E(\Delta/H_\alpha) = \int_0^{\infty} \lambda d U(\lambda/H_\alpha)$$

y la cuestión se reduce a comparar $E(\Delta/H_\alpha)$ con $E(\Delta)$

Más general es el planteamiento de Ove Lundberg (1), que lo hace a través de los procesos aleatorios de Poisson compuestos. Considerando:

$$P(v_t = n/t) = \int_0^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} e^{-tx} d U(x) = P_n(t)$$

(1) Lundberg, Ove: Une note sur des Systèmes de tarification basés sur des modèles du type Poisson composé. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. I. Enero, 1966. Pag. 49-58

suponiendo que $E(v_t) = t$ (tiempo operacional) y que la varianza de $U(x)$ es b , la probabilidad condicionada por la hipótesis de que han ocurrido n siniestros durante el tiempo t será:

$$d U_n(x) = \frac{\frac{(tx)^n}{n!} e^{-tx} d U(x)}{P_n(t)} = \frac{x^n e^{-tx} d U(x)}{\int_0^{\infty} x^n e^{-tx} d U(x)}$$

La esperanza matemática del riesgo condicionada al número n de siniestros durante el periodo t será:

$$K_n(t) = E(\xi/v_t = n) = E_n(\xi) = \int_0^{\infty} x d U(x)$$

Sabiendo que han ocurrido n siniestros en $(0, t)$, se tiene que $K_n(t)$ es la prima modelada sobre el riesgo, según la terminología de Delaporte.

La varianza condicionada será:

$$\sigma_n^2(t) = \int_0^{\infty} (x - K_n)^2 d U_n(x) = \int_0^{\infty} (x-1)^2 d U_n(x) - (K_n - 1)^2$$

cuya medida a priori nos da la varianza en relación a las primas modeladas:

$$V_t(\xi) = E(\sigma_v^2(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2(t) P_n(t) = b - \sum_{n=0}^{\beta} \{K_n(t) - 1\}^2 P_n(t)$$

Como quiera que $V_{\infty}(\xi) = 0$, se tiene que el coeficiente de eficiencia definido por Delaporte, será:

$$C_t = \frac{V_t(\xi)}{V_0(\xi)} = 1 - \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \{K_n(t) - 1\}^2 P_n(t)$$

que también demuestra que $C_t \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

La función $K_n(t)$ constituye, en la teoría de los procesos aleatorios, la llamada función de intensidad. La mejor aproximación lineal es $K_n(t) = \frac{1+bn}{1+bt}$, es decir, el proceso de Polya. También se demuestra que entre todos los procesos de Poisson compuestos que tienen la misma varianza el modelo de Polya es el que hace máxima la eficacia C_t .

Una conclusión interesante de Lindberg es que la estimación basada en el sistema de ausencia de siniestros tiene una varianza que no tiende a cero para un tiempo infinito, contrariamente a lo que sucede en las estimaciones basadas en el número de siniestros.

SISTEMA DE TARIFICACION "MERIT RATING"

El sistema de tarificación denominado "Merit Rating", que podríamos traducir literalmente por "tarificación según métodos" o "tarificación según actitudes" del asegurado, supone que los riesgos se clasifican de acuerdo a los siniestros previamente producidos, con arreglo a un registro de infracciones.

La diferencia entre este sistema de tarificación y los anteriormente analizados no es esencial. La diferencia fundamental se produce con respecto a la tarificación por clases (class rating), ya que se tiene en cuenta la experiencia adquirida de los expuestos al riesgo, previamente clasificados de acuerdo con el correspondiente plan (lo que se denomina "merit plan rating") = accidentes, infracciones, etc.

El sistema de tarificación "merit rating" tiene su máxima aplicación en el seguro del automóvil, ya que la prima de cada póliza se va rectificando en función de la propia propensión al siniestro del asegurado. Presenta, pues, una diferencia fundamental con el sistema de tarificación que posteriormente se denominará "tarificación según programa" (Schedule Rating), en el que la prima se obtiene por causas apriorísticas, mientras que en el sistema "merit rating", la prima disminuye o aumenta por motivos "a posteriori", es decir, observada la conducta del asegurado durante el periodo de cobertura. De ahí que, como acertadamente indica Jesús Vegas en su trabajo "Aplicación de la Teoría de la Credibilidad a la tarificación de riesgos", es fundamental (en el sistema merit rating) que el comportamiento del asegurado influya decisivamente en el acaecimiento de la siniestralidad, y supone pues un estímulo para prevenir los siniestros". Es decir, este sistema de tarificación tiene vigencia en aquellos riesgos en los que el acontecimiento del siniestro, o, por lo menos, la propensión al siniestro, depende de la actitud del asegurado. De ahí que se aplique al seguro del automóvil (donde la actitud del conductor es fundamental), y, además, al seguro de accidentes de trabajo, de responsabilidad civil, seguro de desempleo, etc.

Una de las aportaciones más importantes es la de los autores Haehling von Lanzenauer y Lundberg (1), quienes parten del hecho de que la distribución binomial negativa sirve para estimar el número esperado de siniestros y la distribución de la población según su propensión a declarar siniestros.

En realidad, esta distribución se refiere a siniestros y no a accidentes, ya que es frecuente entonces no declarar algunos accidentes (la acertadamente denominada "hambre de bonus" de Carl Philipson, que hemos definido anteriormente, al hablar del sistema de bonificación por ausencia de siniestros), por lo que la obtención del modelo correspondiente a la propensión de causar accidentes requiere considerar explícitamente la conducta del asegurado frente al siniestro.

Con este propósito, los autores citados consideran a la población asegurada agrupada en categorías de riesgo homogéneas $j(j=1,2,\dots,j-1)$; en los sistemas merit-rating, los asegurados de una misma categoría de riesgo están también agrupados de acuerdo con algún criterio de conducta histórica, como suele ser la siniestralidad real producida \underline{n} ($n=1,2,\dots,N$), por lo que cada asegurado estará asignado a una determinada clase de riesgo (\underline{n}) dentro de su categoría. Cada clase de riesgo se caracteriza por un descuento (bonus) o un recargo (malus) sobre la prima base. Luego, para cada clase \underline{n} podemos definir un conjunto de funciones de transición $T_n(k)$ que especifica la clase de riesgo en el próximo periodo después de declarar K ($k=0,1,2,\dots,K(n)$) siniestros a la entidad aseguradora. La función de transición es la misma para $k \leq K(n)$. Es fácil de notar que $K(n)$ puede variar de unas clases de riesgo a otras.

En definitiva, tenemos que un asegurado perteneciente a la categoría j y a la clase i tendrá una propensión a causar accidentes igual a λ , asumiendo la hipótesis de la existencia de una dis-

(1) Haehling von Lanzenauer, Christoph- Lundberg, William N.: The propensity to cause accidents. The Astin Bulletin. Vol. VII, Part. II. Septiembre, 1973. Pag. 154-164

tribución $Z(\lambda)$. Esta propensión puede subdividirse en intervalos $S(s=1,2,\dots,S)$. A continuación, los autores se plantean el problema de la conducta del asegurado frente al accidente del que es culpable. Su decisión dependerá del tamaño del "accidente crítico": si la cuantía del accidente está por debajo de este tamaño, el asegurado no declarará el siniestro, para no perder su privilegiada posición. Pero si es superior, entonces sí declarará el siniestro, con la consiguiente reclasificación, de acuerdo con la estructura del sistema. El tamaño del "accidente crítico" será una variable positiva, que dependerá de la categoría del riesgo (elaborada con criterios objetivos) j , su posición en el sistema merit-rating anterior a la decisión, expresada por la clase de riesgo n , y el número de siniestros k durante el período en cuestión, y, finalmente, de su propensión a causar accidentes s .

La conducta del asegurado puede formalizarse mediante la regla de decisión: $L_t - L_t^k(j,n,s) \geq 0$.

Si $L_t - L_t^k(j,n,s) \geq 0$, siniestro

Si $L_t - L_t^k(j,n,s) < 0$, no "

siendo L_t la cuantía del siniestro en el año t y $L_t^k(j,n,s)$ el tamaño del accidente crítico. En este punto, Haehling von Lanzenauer (1) ha obtenido el valor óptimo L_t^k , de acuerdo con criterios de optimización dados. Sin embargo, es en su trabajo en colaboración con William N. Lundberg, que anteriormente reseñamos, donde elabora un nuevo modelo, mediante la obtención de la matriz estocástica del proceso markoviano de pasar de i a j , dados $m(m=1,2,\dots,N)$ y $r(r=1,2,\dots,S)$, es decir, $\Pi_t(i,j/m,r)$. Se llega así a la conclusión de que la determinación del estado de equilibrio del proceso es, precisamente, la distribución de los riesgos según su propensión a causar accidentes. Si las probabilidades de transición no fueran estacionarias, los autores citados sugieren aplicar los modelos de flujos lineales. Finalmente, ambos autores aplican los resultados obtenidos al vigente sistema de tarificación del automóvil en Alemania.

(1) Haehling von Lanzenauer, Christoph: Optimal Claim Decisions in Automobile Insurance Systems with Merit Rating. Structures.1970

Numerosos autores, fundamentalmente norteamericanos, han dedicado su atención y sus investigaciones al sistema de tarificación "Merit Rating". Entre ellos, cabe citar de manera destacada los siguientes:

- Bailey, Robert: Some considerations on automobile rating systems utilizang individual driving records. Proceedings of the Casulaty Actuarial Society. (P.C.A.S.). n° 47. 1960.
- Bailey, Robert -Le Roy Simon, John: An Actuarial NOte on the Credibility of Experiance of a Single Private Passen ger Car. P.C.A.S. n° 46. 1959.
-Two Studies in Automobile Insurance Ratemaking. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. IV. Diciembre, 1960. Pag. 192-217
- Dropkin, Lester B.: Some Considerations on Auot Rating Systems utilizing Individual Driving Records. P.C.A.S. n° 46. 1959
-Automobile Merit-Rating and Inverse Probabilities P.C.A.S. n° 47. 1960. Pag. 37-40
- Hewitt, Charles C.: The Negative Binomial Applied to the Canadian Merit Rating Plan ofr Individual Automobile Risk P.C.A.S. n° 47. 1960. Pag. 55-65

LA TARIFICACION RETROSPECTIVA

En contraste con los anteriores métodos de tarificación, en donde la corrección de primas se hace con vistas al futuro de la pó- liza, la tarificación retrospectiva o "retrospective rating" permite un ajuste para el periodo que finaliza en ese momento. La prima se determina, parcial o totalmente, por la siniestralidad real del asegurado durante el periodo de coertura y el contrato es renego- ciado nuevamente.

En definitiva, se puede hablar de dos sistemas fundamenta- les de tarificación, la llamada "tarificación prospectiva" (pros-

pective rating) y la "tarificación retrospectiva" (retrospective rating). Dorweiler (1) ha definido ambos sistemas de la siguiente forma: "Un plan de tarificación "experience rating" en el cual la experiencia del riesgo es usada para determinar primas para periodos futuros se dice que es un plan prospectivo de experience rating. La inmensa mayoría de los planes de uso general han sido de este tipo. Un plan en el cual la experiencia de un determinado periodo es usada para determinar primas a aplicar a un periodo pasado, se dice que es un plan retrospectivo. Ambos tipos de planes son enteramente válidos y representan caminos para reconocer variaciones en la inmanente aleatoriedad de los riesgos.

La tarificación retrospectiva se aplica, normalmente, al ramo de accidentes de trabajo; por ejemplo, las entidades aseguradoras norteamericanas suelen emplear la siguiente fórmula:

$$P_r = \{P_b + S(f)\} I$$

donde P_r expresa la prima retrospectiva, a satisfacer para el año en cuestión, P_b es la prima base, destinada a cubrir los gastos fijos del asegurador (gastos de administración y de producción), S es la siniestralidad real sufrida por el colectivo de trabajadores asegurados, f es un factor de conversión, destinado a cubrir los costes variables del asegurador (dependientes del número de siniestros), y, finalmente, I es el conjunto de impuestos y recargos.

De esta forma, cuanto mayor sea el colectivo asegurado, menor es el riesgo asociado al uso de este sistema de tarificación, desde el punto de vista del patrono asegurado.

La tarificación retrospectiva tuvo su origen en los años treinta, cuando la gran depresión impuso la necesidad de implantar procedimientos para aplicar a las grandes empresas aseguradoras de

(1) Dorweiler, Paul: A Survey of Risk Credibility in Experience Rating. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. Vol. 21, Part. 1. 1934. Pag. 1-25

accidentes de trabajo primas más adecuadas al momento de crisis que vivían. En el apartado "Origin and Development of Retrospective Rating" de su trabajo, Makgill (1) analiza cómo se desarrolló esta técnica con motivo de la depresión americana. Como dice este autor, "La tarificación retrospectiva en la forma en que es generalmente conocida en el campo del seguro de accidentes, es una consecuencia de la experimentación sobre la siniestralidad de lagunas compañías de seguros, durante la etapa más dura de la depresión, para desarrollar los medios que permitieran obtener una adecuada tarificación sobre los riesgos de accidentes de trabajo. Además de los variados y problemáticos factores de la depresión, los extremadamente severos resultados de siniestralidad en el seguro de accidentes de trabajo produjeron un delicadísimo problema. Hablando en términos generales, los primeros intentos de tarificación retrospectiva fueron bastante toscos, y en muchos casos consistían simplemente en la determinación de la prima dividiendo las pérdidas actuales por una plausible razón de siniestralidad. Esta prima se limitaba generalmente a establecer ciertos porcentajes mínimo y máximo de la prima standar que previamente se había estipulado. Conforme fue pasando el tiempo, se descubrió que este tipo de tarificación no sólo producía una prima final más realista, sino que, además, servía al muy deseable propósito de, subsidiariamente, mejorar la experiencia estadística de múltiples riesgos a los que se había aplicado. Durante este mismo periodo, muchos asegurados estaban extremadamente insatisfechos con los resultados producidos por los sistemas de tarificación tradicionales para el seguro de accidentes de trabajo, lo que se evidenciaba por el hecho de que múltiples contratos pasaban de una compañía a otra, en un intento de obtener resultados más satisfactorios, y también por el sustancial número de pólizas que abandonaban el mercado del seguro, para proceder a autoasegurarse.

(1) Makgill, Stephen S.: An Analysis of the Adequacy of the Various Factors and Rating Values Used in Retrospective Rating. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. Vol 50. 1963. Pag.32

La continua experimentación con la tarificación retrospectiva por parte de múltiples entidades aseguradoras pareció dar con una solución al problema. Desde que, hablando en términos generales, la tarificación retrospectiva produjo una prima final mucho más ajustada al riesgo real que los sistemas tradicionales de tarificación, se dió un gran paso en la solución de la insatisfacción de los asegurados. Este gradual desarrollo dio como resultado lo que, en 1936, fue conocido como Plan de Tarificación Retrospectiva para el Seguro de Accidentes de Trabajo, que fue promulgado por el "National Council on Compensation Insurance". En dicho plan, se definió una fórmula de tarificación relativamente simple: La prima final se componía de la prima standar multiplicada por el porcentaje de prima básica más las pérdidas actuales que se hubieran producido, multiplicadas por un factor de conversión de pérdidas. Esta prima final estaba, por supuesto, sujeta a tablas de porcentajes máximos y mínimos".

Carlson (1) ha formulado el sistema de tarificación retrospectiva en los siguientes términos: teniendo en cuenta que, en tal tipo de tarificación, las pérdidas producidas son una regla de autotarificación, la prima modificada M se encuentra acotada superior e inferiormente de acuerdo con la siguiente expresión:

$$M = \begin{cases} H & \text{si } t \leq h \\ B+Ct & \text{si } h < t < g \\ G & \text{si } t \geq g \end{cases}$$

siendo M la prima modificada, H y G la prima mínima y máxima, t la razón de siniestralidad o tasa de pérdidas del riesgo, con un mínimo en h y un máximo en g , C es el factor de conversión, que incluye las variables dependientes de las pérdidas, y, por último, B es la prima básica, que viene definida por la relación: $B = e + t'(g) - t''(h)$,

(1) Carlson, Thomas O.: Observations on casualty insurance ratemaking theory in the United States Transactions of the 17th International Congress of Actuaries. London, 1964. Volumen III. Pag. 541-559

donde e es la provisión para otros gastos (de administración, de producción, etc.), $t'(g)$ es la razón de siniestralidad de la clase media, en exceso de g , con respecto a la siniestralidad total, y $t''(h)$ es la razón de siniestralidad de la clase media, inferior a j , con respecto a las pérdidas totales.

TARIFICACION SEGUN PROGRAMA

La tarificación según programa, tarificación de catálogo, plan de tarificación l "Schedule Rating" es un sistema de tarificación en el que se establece un pormenorizado cuadro de factores de riesgo, y se tarifica en función de dichos factores. Se diferencia de manera fundamental del "Merit Rating" en que, en la tarificación según programa, la clasificación de factores de riesgo y consiguiente cálculo de primas se hace por motivos apriorísticos, mientras que en el "Merit Rating", la prima se establece y modifica (incrementa o disminuye) por el comportamiento "a posteriori" del asegurado. El "Schedule Rating" se establece mediante una clasificación pormenorizada de factores atendiendo a las características físicas de los riesgos individuales. Fué en su tiempo utilizado, con carácter universal, en el seguro de accidentes de trabajo, si bien en la actualidad no se utiliza prácticamente más que en los seguros de incendios y robo, donde todavía constituye un método de diferenciación de las tarifas. Como indica Carlson, en el artículo anteriormente reseñado, "el extremo pormenorizamiento de la clasificación efectuada por el sistema "Schedule Rating", junto con la interacción de multitud de factores implicados en el riesgo y cuyo análisis rebasa cualquier posibilidad, hacen inviable, en la tarificación de múltiples riesgos, este sistema".

La tarificación según programa presenta su mayor aplicación, en los momentos actuales, en el seguro de incendios, donde cada edificio individual tiene su propia prima. La estructura del inmueble (materiales de construcción empleados, situación del riesgo, extintores y salidas de urgencia, etc.) influyen decisivamente en el

tipo de prima a aplicar, de acuerdo con un plan elaborado por el asegurador. También se aplica con frecuencia este sistema al seguro de robo, en el que se conceden descuentos o ventajas al asegurado que emplee mecanismos de prevención de robos (alarmas electrónicas, cajas fuertes, etc.).

Como indica Greene (1), los sistemas de tarificación del seguro de incendios emplean dos métodos básicos: la tarificación según programa, de catálogo o baremo para los edificios comerciales, y la tarificación normal para viviendas.

El objetivo fundamental de la tarificación según programa es proporcionar un incentivo para la prevención de pérdidas, y lograr cierta equidad al reconocer diferencias básicas en cuanto al riesgo de incendio entre las diferentes propiedades aseguradas. Sería injusta asignar al edificio de una granja agrícola la misma tarifa que a un edificio ubicado frente a una estación de bomberos, o cobrar a un pequeño almacén la misma tarifa que a una fábrica. Por ello, se ha elaborado un plan complejo para aplicar con equidad la tarifa de incendios.

No es práctico premiar al propietario de un edificio "seguro" mediante las técnicas de tarificación según experiencia o tarificación retrospectiva. Los siniestros ocurren con tan poca frecuencia que el asegurador se encontraría en la obligación de otorgar un gran descuento anual a casi todos sus asegurados. Si un siniestro ocurriese realmente, la prima del asegurado por el año en cuestión sería lógicamente aumentada, pero es inconcebible que fuese aumentada lo suficiente como para compensar todos los años durante los cuales se pagaron primas muy bajas; debido a esta circunstancia, se ha implantado un sistema de recompensas para el asegurado por adopción de medidas de seguridad que se consideran aptas para reducir los peligros de incendio. Como se da el caso de que cada edificio comercial es único en este sentido, se establecen organizaciones de

(1) Greene, Mark R.: Riesgo y Seguro. Ed. Mapfre. 1974. Pag. 878.

tarificación en cada Estado para inspeccionar y valorar cada construcción. A través de un acuerdo mutuo, la mayoría de los aseguradores se adhieren a la tarificación así establecida.

Por ejemplo, puede existir un recargo del 5% en la prima básica por ausencia de extintores de incendios o de determinadas paredes antifuego en el edificio. Bonificaciones del 20% o más pueden autorizarse por utilizar un sistema homologado de extintores. La cantidad del recargo o bonificación no está basada en estadísticas, sino en el juicio de un ingeniero para establecer determinados aspectos que afectan a la probabilidad de siniestros. Las primas básicas son también más o menos arbitrarias.

En todos los sistemas de tarificación según programa para el seguro de incendios, la tarificación depende básicamente de los siguientes factores: protección contra incendios de la ciudad sede del riesgo, tipo de construcción, contenido del edificio y grado de exposición a pérdidas procedentes del exterior del edificio.

El trabajo más interesante sobre este sistema de tarificación es el de Mc Intosh (1), discutido y analizado por Leser y Dropkin en los "Proceedings of the Casualty Actuarial Society" nº 49 de 1962, en donde hacen uso del álgebra y de la programación lineal.

TARIFICACION ESPECIAL

La tarificación especial o "Special Rating" consiste, básicamente, en una serie de descuentos sobre la tarifa uniforme, ajustada por clases o categorías (class rating), normalmente a los aseguradores que reúnen ciertos requisitos que determinan una reducción en la probabilidad de ocurrencia del siniestro. También toma

1) Mc Intosh, K.L.: Mathematical limits to the Judgment Factor in Fire Schedule Rating. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. nº 48. 1961

la forma de reparto de dividendos al final del periodo de cobertura. Una tarificación "Special Rating" la efectúa una Entidad que tenga una adecuada selección de riesgos, de forma que la reducción en la siniestralidad le permita una baja paralela en la prima, con el consiguiente reclamo comercial para los posibles asegurados. También puede suponer un recargo en la prima, cuando el riesgo sea agravado, como en el ramo de Vida sucede con los denominados "riesgos tarados".

Con esto finalizamos nuestro análisis sobre los sistemas de tarificación "a posteriori" más importantes. Antes de comenzar con otras cuestiones, pasemos brevemente revista a un aspecto que influye de manera importante en la tarificación, cual es el proceso inflacionista que, de manera acusada, vive nuestro país, y, en general, todos los de su entorno sociopolítico. Recientemente, Taylor (1) y Waters (2) han planteado este problema, ciertamente grave en los momentos actuales, de la inflación y su influencia en la tarificación. El problema planteado queda resumido en la siguiente pregunta, autoformulada por Waters: "Si el coste de los siniestros individuales está creciendo, ¿cómo se deben incrementar las primas, a efectos de que se mantenga invariable la probabilidad de ruina, que tal probabilidad permanezca bajo control del ente asegurador?". Las modelizaciones de Taylor y Waters tienden a resolver la cuestión planteada en la pregunta. Waters, en concreto, demuestra que la probabilidad de ruina se puede mantener dentro de una determinada banda de fluctuación si la prima anual es calculada conforme al principio de la utilidad nula, con una función de utilidad exponencial, o, como primera aproximación, de acuerdo con el principio de la varianza.

(1) Taylor, G.C.: Probability of Ruin under Inflationary Conditions or under Experience Rating. The Astin Bulletin. Vol. 10, Part. 2. Marzo, 1979. Pag. 149-162

(2) Waters, M.R.: Premium Rates under Inflationary Conditions. The Astin Bulletin. Vol. 11, Part. 1. Junio, 1980. Pag. 29-34

Este tema es, ciertamente, de una gran importancia en los momentos actuales, y está relacionado con el entorno económico al que ha de referirse la tarificación estadística, si es que ésta pretende servir al ente económico que es la empresa asegurador, es decir, que caracterizan al proceso de riesgo y su comercialización en el mercado del seguro.

En este sentido, un reciente trabajo de Buhlmann (1) ha planteado el problema de la "comercialidad" de la prima, es decir, de las condiciones económicas que afectan a la determinación de la prima. Buhlmann habla de "principios de cálculo de primas" (premium calculation principle) en contraposición con los "principios económicos" (economic premium principle). Un "principio de cálculo de primas" es una función que asigna a la variable aleatoria X del daño total (o a su función de distribución, $F_X(x)$) un número real P (prima):

$$\xi : X \rightarrow P \quad \text{ó} \quad \xi : F_X(x) \rightarrow P$$

Entre estos principios, tendremos los conocidos del valor medio, de la varianza, etc.

Como dice Buhlmann, por supuesto que las primas no sólo dependen del riesgo, sino también de las condiciones del mercado. Supongamos que el riesgo puede ser descrito por una variable aleatoria X y las condiciones de mercado por una variable aleatoria Z . El "principio de tarificación económica" consistirá en definir la función:

$$\eta : (X, Z) \rightarrow P$$

Buhlmann desarrolla en su trabajo un modelo matemático para el mercado, es decir, para la variante del mercado Z .

Concluimos esta parte de nuestro trabajo, referida a la tarificación según experiencia, retornando a los orígenes metodológicos de la misma, orígenes que nos conducen a la Teoría de la Credibilidad. En efecto, el fundamento actuarial de los sistemas de tarificación "experience rating" es la teoría de la credibilidad, por cuanto tales sistemas se basan en la modificación de una tarifa ini-

(1) Buhlmann Hans: An Economic Premium Principle. The Astin Bulletin. Vol. 11, Part. 1. Junio, 1980. Pag. 52-60

cial en función de la experiencia de siniestralidad de que se va disponiendo, lo que plantea el problema de la "credibilidad" de tal información y de la "fiabilidad" en la permanencia de las condiciones que permitieron formular la tarifa inicial, de carácter uniforme. Al análisis de dichas cuestiones, fundamentales para la rectificación de tarifas con criterios de racionalidad, dedicamos las siguientes líneas de trabajo.

LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD Y SU APLICACION A LA TARIFICACION DE RIESGOS

Como acabamos de indicar, el fundamento actuarial de los sistemas de tarificación según experiencia es la teoría de la credibilidad, que pasamos a analizar. El problema que se plantea es el de conjugación de la información que en su momento permitió elaborar tarifas para los distintos factores de riesgo y la experiencia estadística que, desde la implantación de esas tarifas, se ha ido produciendo. Ante la contemplación de esos dos aspectos del conocimiento sobre el riesgo, la que podríamos llamar información "a priori" y la información "a posteriori" de la que se va disponiendo, surgen de dos tipos fundamentales de preguntas: ¿Hasta qué punto sigue vigente la información a priori que permitió formular las tarifas iniciales? ¿Hasta qué punto es válida, por suficiente y veraz, la nueva información, como para que, a través de ella, se puedan modificar dichas tarifas?. Estas dos preguntas hacen apelación directa a dos conceptos del dominio común dentro del campo actuarial. Fiabilidad y Credibilidad. Siguiendo al profesor Angel Vegas Pérez (1), definiremos la Fiabilidad como "la probabilidad de que un sistema funcione de forma correcta durante un cierto tiempo y en adecuadas condiciones de utilización", mientras que la Credibilidad

(1) Vegas Pérez, Angel: Aplicaciones Actuariales de las Teorías de la "Fiabilidad" y de la "Credibilidad". Memorias del 18º Congreso Internacional de Actuarios. Munich, Junio 1968. Vol. 4. Pag. 723-730. Anuales del Instituto de Actuarios Españoles. nº 8. 1968.

será el "nivel de información de la estadística de que se dispone para la obtención de la muestra, que es una función creciente del tamaño muestral y asintóticamente igual a uno", proponiendo dicho autor definir la medida de la "credibilidad" mediante $C=n/(n+N)$, donde n es el tamaño muestral. Es decir, la fiabilidad nos viene a expresar la medida de la vigencia del sistema constituido, de la información pasada, y la credibilidad, la verosimilitud de la información posterior al establecimiento de dicho sistema, que los cuestiona y cuyo rechazo definitivo, o modificación parcial, dependerá precisamente de ese grado de verosimilitud.

Los conceptos de "credibilidad" y "teoría de la credibilidad" han sido objeto de muy diversas definiciones. Como dice Hickman ((1) y (2)), "Credibilidad es una palabra frecuentemente utilizada en la conversación diaria. En la prensa de los Estados Unidos ha sido usada en relación con los problemas políticos del presente y pasado Presidente (Nixon y Ford). En política, se produce con frecuencia el hecho de que el jefe del Ejecutivo comience con una reserva de credibilidad, que decrece conforme la experiencia de gestión se va desarrollando". En España, podríamos añadir, la palabra "credibilidad" ha sido frecuentemente utilizada, como término político, en fechas recientes. Ahora bien, como manifiesta Hickman, "En el mundo del seguro, la credibilidad se incrementa siempre conforme el bagaje de experiencias se incrementa". Cifrándonos, obviamente al mundo actuarial, sin entrar en disquisiciones terminológicas o etimológicas, este autor define a la teoría de la credibilidad como "una colección de ideas referentes al ajuste sistemático de primas de seguros en función de la experiencia de siniestros obtenida". Co

(1) Hickman, James C.: Introduction and Historical Overview of Credibility. Artículo publicado en el libro: "Credibility: Theory and Applications", editado por P.M. Kahn Academic Press, 1975
Pag. 181-192

(2) Miller, Robert B.- Hickman, James C.: Insurance Credibility Theory and Bayesian Estimation. "Credibility: Theory and Applications".
Pag. 249-279.

mo el mismo Hickman reconoce, "esta definición preliminar es, probablemente, demasiado amplia, poco concreta, para ser útil". En un nivel más operativo, Hewitt (1) afirma que "el término Credibilidad debe ser aplicado de la siguiente manera:

- 1/ Existe una hipótesis, concerniente a la media esperada de observaciones.
- 2/ Se establece un valor medio de las observaciones correspondientes a n pruebas o exposiciones al riesgo.
- 3/ Con estos dos valores entre los que elegir, se formula la siguiente pregunta: ¿Hasta que punto creemos en el valor medio inicial, o, por el contrario, en el resultado de las observaciones ?.
- 4/ El grado de "creencia" en las observaciones es expresado por una medida Z , y el grado de creencia en la hipótesis (inicial) por su complementaria $1-Z$.
- 5/ Formalmente, surge la siguiente relación lineal:

$$C = ZR + (1-Z) H$$

donde:

R expresa la media de las observaciones (Resultados).

H es la Hipótesis, y

C es el valor a utilizar como resultado del Compromiso entre los anteriores parámetros.

Entonces, "Credibilidad" es un estimador lineal de la verdadera (o inherente) esperanza obtenida como resultado de un compromiso entre hipótesis y observación".

La anterior fórmula es fundamental en la teoría de la credibilidad, pues es la que resume en términos formales lo que dicha teoría implica y significa. Volveremos con alguna detención sobre ello. Pero antes, insistamos en el proceso de descripción del objeto

(1) Hewitt, Charles C., Jr.: Credibility for Severity. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. nº 57. 1970. Pag. 148-171

de esta ciencia, en su concepto y en su significado. Para Greene (1) "Credibilidad es, en términos generales, el grado en que el tarifador puede llegar a confiar en la exactitud de la experiencia de pérdidas que se observe en un área determinada. Por ejemplo, el tarifador está revisando la tarificación de una determinada póliza suscrita por una compañía en una determinada área geográfica, destacan 50 pólizas cuyas pérdidas han superado los índices previstos. ¿ Es conveniente fijar la tarificación futura de acuerdo con esas 50 pólizas, o es posible que el año que se analiza produzca pérdidas superiores al promedio sólo por azar ?. El tarifador desea saber cuántas pólizas deberían estudiarse antes de establecer la evaluación de los siniestros en cuestión, al objeto de preparar unas nuevas tarifas. Si al renovarse las pólizas, el tarifador sube la prima a todos los clientes que sufrieron pérdidas, se desprecia el principio de la dispersión de las pérdidas, propio del mecanismo estadístico del seguro. Si se le exigiese a cada pequeño grupo "pagar por sus propias pérdidas", es evidente que se vulneraría el criterio de transferencia de riesgos. No salvaría la situación elevar la tarifa de incendios de una pequeña comunidad, víctima de un sólo incendio catastrófico, porque la experiencia de un grupo tan pequeño y en un sólo año, no es verosímil. El asegurador, siguiendo criterios de equidad, debe hacer clasificaciones razonables de asegurados y riesgos, y cobrar una tarifa apropiada a los grandes grupos incluidos en estas clasificaciones. No es justo que un grupo subencione a otro, si cada uno es lo suficientemente amplio y extenso como para desarrollar en él una experiencia de pérdidas suficientemente verosímil".

Queda, pues, suficientemente enmarcado en su contexto el problema. Queda claro que dicho problema tiene su origen, fundamentalmente, en las clasificaciones que se hacen de los datos, con lo que las estadísticas de los distintos grupos son, a veces, demasiado escasas para darles pleno crédito. Por otra parte, el escaso número

(1) Greene, Mark R.: Riesgo y Seguro. Ed. Mapfre. 1974. Pag. 866.

de datos da lugar a fluctuaciones, con resultados muchas veces contradictorios. Se hace, entonces, preciso un método que permita combinar la nueva información estadística con la anteriormente poseída. Una forma sencilla de conseguir ésto es la utilización de una ponderación o factor de credibilidad, que indique el grado de confianza que nos merecen los nuevos datos. El factor de ponderación complementario puede venir dado por el conocimiento anterior o bien por informaciones más amplias de que se disponga.

Es preciso puntualizar que la credibilidad no implica propiedad intrínseca de los datos, ya que éstos tienen que ser comparados con informaciones anteriores. Cuando esta teoría se emplea en la tarificación de los seguros elementales, el conocimiento anterior está, generalmente, representado por el tipo de primas que se están aplicando. Un aspecto importante que se debe resaltar es el hecho de que hay siempre implícito, en cualquier medida de credibilidad, el propósito finalista de los datos. Como dice Longley-Cook (1), unos mismos datos sobre incendios pueden tener baja credibilidad cuando se aplican en un Estado de la Unión distinto del que proceden.

Se nos plantean dos problemas fundamentales: a/ El primer problema se puede establecer en los siguientes términos: Dada una frecuencia de siniestros basada en la experiencia pasada y un conjunto de nuevas observaciones, ¿cuándo se considera que tendremos datos suficientes para que se pueda dar a la nueva experiencia plena credibilidad, y utilizarla por sí misma para el cálculo de primas, en una determinada clasificación ?. ¿Cuándo se produce ese punto de inflexión, a nivel informativo ?. Se trata de un problema de cuantía y calidad de la información de que se va disponiendo. b/ El segundo problema se plantea cuando los datos son tan poco numerosos, o por lo menos, no lo cuantiosos que sería necesario, que se impone el combinarlos con la información existente. La forma en que

(1) Longley-Cook, L.H.: An Introduction to Credibility Theory. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. nº48. 1962. Pag. 191-224

se presenta esta combinación es mediante una media ponderada del tipo:

$$P = (1-Z) B + ZA$$

donde A y B son, respectivamente, las informaciones antigua y nueva y Z es el peso o ponderador al que se denomina factor de credibilidad o, sencillamente, credibilidad. Cuando $Z=1$, se tiene la plena credibilidad o credibilidad total (full credibility), pues entonces sólo se atiende a la nueva información, que merece "plena credibilidad" al investigador. Cuando $Z=0$, se tiene credibilidad nula (en la nueva información) y en general, $0 < Z < 1$, en cuyo caso se tiene una credibilidad parcial.

Desde el punto de vista de la experiencia de una póliza en relación con el colectivo al que la misma pertenece, podemos plantear la fórmula básica de la credibilidad de la siguiente forma: El problema de la credibilidad en el seguro consiste en determinar ponderaciones que afecten a la experiencia de siniestralidad de una póliza o de una clase homogénea, respecto a la experiencia de un colectivo al que pertenezca el riesgo individual. La cuestión básica es determinar hasta qué punto es "creíble" la experiencia observada de un asegurado individual en relación con la prima que debe satisfacer. La solución proviene de aplicar la fórmula que podríamos denominar fórmula básica de la credibilidad, que, como hemos establecido anteriormente, consiste en:

$$P = P_i Z + P_p (1-Z)$$

donde P es la prima pura a aplicar, en el periodo siguiente a un asegurado determinado, i; P_i es la prima pura basada en la experiencia pasada de dicho asegurado, P_p es la prima pura basada en la experiencia pasada del grupo amplio de población a que pertenece el asegurado y Z, por último, es el factor de credibilidad a aplicar a la experiencia pasada del asegurado, verificándose la acotación: $0 < Z < 1$. Al aumentar Z, se aplica mayor peso o "credibilidad" a la experiencia pasada del asegurado. Si $Z=1$, la credibilidad es total, y la prima pura a cobrar se basa completamente en la experiencia pasada del asegurado. Tal es el caso del asegurado que cuenta con una amplia cantidad de unidades de riesgo homogéneas y que es, entonces,

suficiente para hacer una tarificación propia de las mismas, con independencia del colectivo en el que está inmerso. Como es evidente, al aumentar Z , el factor $1-Z$ disminuye y, por tanto, disminuye el peso dado a la evolución de los siniestros en la población total. Como ejemplo de esta clase de aplicación de la fórmula de la credibilidad, tomemos el siguiente libro de Greene, "Riesgo y Seguro", al que anteriormente nos hemos referido: Sea una póliza de accidentes de trabajo de un determinado empresario, con una proporción de siniestros del 70% en comparación con una proporción esperada del 60% para los empresarios de su mismo grupo ocupacional. Sin embargo, el número de riesgos del cual resultó la proporción del 70% era de tal volumen y tipo que sólo se le concedía un 60% de credibilidad. De esta forma, la prima pura para el empresario, en el periodo futuro, se basaría en una proporción de siniestros del 66% en vez del 70% ($P = 0,7 \times 0,6 + 0,6(1 - 0,6) = 0,66$). Debido a que la experiencia individual del empresario no es completamente verosímil, la tarifa aumentará sólo en un 10% ($0,66/0,6$) en vez de un 16,7% ($0,7/0,6$), que correspondería si la credibilidad fuera total.

La fórmula básica de la credibilidad: $P = (1-Z) P_0 + Z P_1$, también puede interpretarse considerando a P_0 como la información "a priori", P_1 la nueva información obtenida mediante la observación de la siniestralidad real de la unidad de riesgo y P el resultado de combinar la información "a priori" con la información adquirida o "a posteriori", es decir:

Prima "a posteriori" = Prima "a priori" $(1-Z) + (\text{Experiencia observada}) Z$.

Expresada de esta forma, la teoría de la credibilidad es un caso particular de inferencia estadística, pero desde el punto de vista bayesiano. Contemplada de esta forma la fórmula de la credibilidad, propongamos como ejemplo para la misma el siguiente, tomado del trabajo de Jesús Vegas Asensio, "Aplicación de la teoría de la credibilidad a la tarificación de riesgos", que ya hemos reseñado: Supongamos que se trata de determinar el tanto medio de mortalidad de los trabajadores de una importante empresa. De los antecedentes estadísticos de que disponen las Entidades aseguradoras, se deduce que existen tres posibles tantos (0,01; 0,02 y 0,05), con una proba-

bilidades "a priori" del 50%, 30% y 20%, respectivamente. El tanto medio de mortalidad "a priori" será, pues:

$$\sum_{i=1}^3 Q_i P(Q_i) = 0,021$$

observada una muestra de 100 trabajadores, se han producido 5 fallecimientos, lo que arroja un tanto muestral del 0,05. Aplicando el teorema de Bayes, resulta:

$$E(Q/X) = \frac{\sum_i Q_i \{P(Q_i) P(X/Q_i)\}}{\sum_i P(Q_i) P(X/Q_i)}$$

siendo X la información muestral. En nuestro caso, obtenemos $E(Q/X) = 0,042$. Es decir, podemos afirmar que la unión del tanto obtenido "a priori" (0,021) y del tanto muestral (0,05) nos da el tanto medio de mortalidad "a posteriori" (0,042), razonamiento que encaja perfectamente con la fórmula de la credibilidad, que, en nuestro caso, será:

$$0,042 = 0,021 (1-Z) + 0,05 Z$$

ecuación que, resuelta, da: $Z = 0,72$. Es decir, a la información muestral le damos una ponderación (índice de confianza en la misma del 72%. El coeficiente $1-Z = 0,27$ es el coeficiente de "fiabilidad" de la información "a priori". Si la muestra hubiera sido menor, por ejemplo, de 20 obreros, pero manteniéndose el tanto muestral del 0,05, entonces nos hubiera resultado un coeficiente de credibilidad del 0,17, es decir, muy inferior al anterior, lo cual es consecuencia inmediata del menor tamaño de la muestra.

La teoría de la credibilidad es, fundamentalmente, un invento de los actuarios norteamericanos. En los términos en los que actualmente ésta es concebida, dicha teoría se desarrolló en torno a la Primera Guerra Mundial, en relación con los sistemas de ajustes de primas en los seguros de accidentes de trabajo. El primer trabajo que en la historia de la Ciencia Actuarial establece la fórmula de la credibilidad como "equilibrio entre la información a priori y la muestra" y que propone estimar la prima pura θ_i mediante la rela-

ción $\theta_i = Z \hat{\theta}_i + (1-Z) \mu$, donde $\hat{\theta}_i$ estima μ , es el de Whitney (1). Anterior, sin embargo, a él es el importante trabajo de Albert H. Mowbray, titulado "How Extensive a Payroll Exposure is Necessary to Give a Dependable Pure Premium ?" (2), que es el primero en la literatura actuarial en el que, como su título claramente expresa, se plantea la trascendental cuestión de la magnitud de información necesaria para modificar los esquemas preestablecidos, objeto de la teoría de la credibilidad. Recientemente, Norberg (3), en un no menos importante trabajo, además de extenso, ha propuesto que la pregunta formulada en el título del trabajo de Mowbray sea actualizada en los siguientes términos: "¿ Cuántos años (n) de observación son precisos, en orden a que $\hat{\theta}_i$ sea un estimador de θ_i con credibilidad total, de forma que $\hat{\theta}_i$ sea tomada como prima para el año $n+1$?".

En esta revisión histórica de la teoría de la credibilidad que, con carácter somero, estamos efectuando, hemos de decir que, como establece Hickman en sus dos trabajos que anteriormente hemos reseñado, existen dos planteamientos fundamentales de la teoría de la credibilidad, que se diferencian en si el modelo de credibilidad propuesto contempla a los parámetros del proceso de riesgo como constantes o como variables aleatorias. Si los parámetros son contemplados como constantes, que deben ser estimados usando únicamente los datos relevantes del seguro, el modelo es acorde con la teoría estadística tradicional, es decir, con la inferencia tradicional. Por contra, si los parámetros que definen el proceso de riesgo son contemplados como variables aleatorias, el modelo es acorde con los planteamientos bayesianos.

-
- (1) Whitney, Albert W.: The Theory of Experience Rating. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. nº 4. 1918. Pag. 274-292
- (2) Mowbray, Albert H.: How Extensive a Payroll Exposure is Necessary to Give a Dependable Pure Premium ?. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. nº 1. 1914. Pag. 24-30
- (3) Norberg, Ragnar: The Credibility Approach to Experience Rating. Scandinavian Actuarial Journal. 1979. nº 4. Pag. 181-221

El primer método, en el que se consideran los parámetros como constantes, requiere, como primer paso fundamental, el fijar el volumen de experiencia estadística precisa para que se produzca la credibilidad plena. Este valor de magnitud de información es absolutamente necesario en la tarificación. Una vez que se ha fijado esa magnitud de credibilidad total, el problema es el de establecer, de forma razonable, los niveles de credibilidad parcial a aplicar para magnitudes inferiores de datos estadísticos.

La fórmula fundamental de la credibilidad debería plantearse de la siguiente forma:

$$Z(n) S + (1-Z(n)) E$$

donde S es alguna medida de la siniestralidad producida y E es la estimación inicial de la siniestralidad esperada, siendo Z(n) el factor de credibilidad, dependiente de n , medida del volumen de experiencia de siniestralidad generada por los siniestros medidos en S; es decir, en la fórmula de la credibilidad, se debe especificar que Z es función de la cuantía de la información disponible, Z(n), y, en cuanto tal, que existen distintos niveles de credibilidad (parcial), que deben ser estimados en función de las magnitudes de información, n .

Como decimos en este primer método, donde los parámetros juegan el papel de constantes, debe ser determinado el valor n_0 que hace que $Z(n_0) = 1$, es decir, la credibilidad sea total. Un ejemplo clásico presentado por Longley-Cook en su trabajo "An Introduction to Credibility Theory", que anteriormente reseñamos, y, así mismo, en el trabajo de Mayerson, Bowers y Jones (1), corresponde a la estimación del parámetro λt de una distribución de Poisson. Se busca el valor n_0 tal que

$$P \{ (1-k) E(\tilde{x}) < \tilde{x} < (1+k) E(\tilde{x}) \} > P$$

(1) Mayerson, Allen L.- Jones, Donald A.- Bowers, Newton L.: On the Credibility of the Pure Premium. Proceedings of the Casualty Actuarial Society nº 55. 1968.

donde \tilde{x} expresa el número total de siniestros en el colectivo que se analiza. La distribución de \tilde{x} depende del índice de la dimensión o volumen del colectivo, n . En nuestro particular ejemplo, \tilde{x} tiene una distribución de Poisson. Si $k = 0,05$ y $p = 0,9$, la credibilidad total se expresaría en la forma:

$$P \left\{ \frac{-0,05 E(\tilde{x})}{\sigma_{\tilde{x}}^2} \leq \frac{\tilde{x} - E(\tilde{x})}{\sigma_{\tilde{x}}^2} \leq \frac{0,05 E(\tilde{x})}{3\sigma_{\tilde{x}}^2} \right\} \geq 0,9$$

$$P \left\{ -0,05 \sqrt{\lambda t} \leq \frac{\tilde{x} - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \leq 0,05 \sqrt{\lambda t} \right\} \geq 0,9$$

Si utilizamos x como una estimación de $E(\tilde{x})$, sujeto a estas hipótesis, la aproximación normal, $N(0,1)$, a $(\tilde{x} - \lambda t) / \sqrt{\lambda t}$ nos conduce a $x = 1.084$, es decir, $Z(1.084) = 1$, donde la cuantía de la experiencia es medida en términos del número de siniestros ocurridos.

Un problema importante en esta primera modelización es, como hemos indicado anteriormente, el de la asignación de valores a $Z(n)$ para valores $n \leq n_0$, es decir, la definición de las credibilidades parciales, en función de los distintos valores de n . A expensas de que posteriormente volvamos sobre esta cuestión, podemos decir que modelos típicos de credibilidad parcial han sido: $Z(n) = \sqrt{n}/\sqrt{n_0}$ y $Z(n) = nc/(n+h)$, donde $c = (n_0+h)/n_0$, $n \leq n_0$.

La segunda modelización es la bayesiana. En ella, el número esperado de siniestros para un determinado colectivo es contemplado y analizado como siendo generado por un proceso aleatorio, que no puede ser completamente conocido. El planteamiento bayesiano no requiere que se especifique un tanto de error, k , ni una probabilidad de precisión, p , para establecer el volumen de información precisa para la plena credibilidad. La credibilidad parcial, así mismo, no es un problema en el planteamiento bayesiano, ya que la ponderación de los datos de siniestros es dada automáticamente en él.

Los primeros indicios de planteamiento bayesiano en la teo-

ría de la credibilidad fueron dados por Arthur L. Bailey ((1) y (2)) Antes incluso de que los fundamentos de la estadística bayesiana fueran suficientemente conocidos, Bailey criticaba abiertamente la estadística clásica y desarrollaba una incipiente aproximación bayesiana a la credibilidad. El trabajo de Bailey fué traducido en términos de la moderna estadística bayesiana por Mayerson (3). Bühlman (4), posteriormente, desarrolló la idea de aproximar la media "a posteriori" por una función lineal de la media "a priori" y la media de los siniestros. Por medio de los mínimos cuadrados, obtiene para los factores de credibilidad la siguiente expresión:

$$Z(n) = \frac{\text{Var}(\tilde{\mu})}{\text{Var}(\tilde{\mu}) + E_{\mu} \text{Var}(\tilde{\mu}/\mu)}$$

donde $\text{Var}(\tilde{\mu})$ es la varianza de la distribución a priori de $\tilde{\mu}$, el número esperado de siniestros, y E_{μ} expresa el operador esperanza con respecto a la distribución a priori. Bailey y otros habían ya encontrado factores de credibilidad de este tipo para beta-binomial, gamma-Poisson y normal-normal, modelos bayesianos. Sobre estas for-

- (1) Bailey, Arthur L.: A Generalized Theory of Credibility Proceedings of the Casualty Actuarial Society. n° 32. 1945. Pag. 13-20
- (2) Bailey, Arthur L.: Credibility procedures. Laplace's generalization of Bayes' rule, and the combination of collateral knowledge with observed data. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. n° 37. 1950. Pag. 7-23. Discusión: P.C.A.S. n° 37. Pag. 94-115
- (3) Mayerson, Allen L.: A Bayesian View of Credibility. Proceedings of the Casualty Actuarial Society. n° 51. 1964. Pag. 85-104
- (4) Bühlman, Hans: Experience Rating and Credibility. The Astin Bulletin. n° 4. 1967. Pag. 199-207. The Astin Bulletin. n° 5. Pag. 157-165

mulaciones bayesianas de la teoría de la credibilidad volveremos posteriormente. Simplemente digamos ahora que, en ellas, destacan los trabajos de Houston (1) y, recientemente, de Zehnwirth (2).

Hemos indicado anteriormente que un problema fundamental en la teoría de la credibilidad clásica es el de la determinación del nivel de información necesario para la credibilidad plena o total en la misma, y, a partir de dicho nivel, el de los niveles correspondientes a las distintas credibilidades parciales. Como dicen Beard, Pentikainen y Pesonen en su obra: "Risk Theory", a la que nos hemos referido varias veces en este trabajo, se plantea el problema de hallar valores adecuados para el factor de credibilidad Z , que tengan en cuenta la necesidad de eliminar las fluctuaciones aleatorias excesivas en la prima. Más concretamente, el valor de Z estará sujeto a la condición de que las fluctuaciones aleatorias en la siniestralidad no moiven, con probabilidad $1-\epsilon$, un cambio en la prima "a priori" superior al 100p%, lo cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$Z \frac{\Delta X}{E(X)} = p \quad (1)$$

donde $E(X)$ expresa la siniestralidad media esperada del colectivo asegurado y ΔX un exceso de siniestralidad, que se obtiene de la expresión:

$$F\{E(X) + \Delta X\} - F\{E(X) - \Delta X\} = 1 - \epsilon$$

donde F es la característica funcional de la distribución del daño total del colectivo. Por tanto, el valor absoluto de la desviación

(1) Houston, David B.: Risk, Insurance and Sampling. Journal of Risk and Insurance. Diciembre, 1964. Pag. 535-538

(2) Zehnwirth, Benjamin: The Mean Credibility Formule is a Bayes Rule. Scandinavian Actuarial Journal. 1977. nº 4. Pag. 212-216

de la siniestralidad $|X - \Delta X|$ será mayor que ΔX sólo con probabilidad ϵ . Por tanto, resulta:

$$\frac{\Delta X}{E(X)} \leq S_{\epsilon} \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{n} c_1}$$

en donde $c_2 = \int_0^{\infty} x^2 dV(X)$, \bar{n} es el número medio de siniestros, $c_1 = \int_0^{\infty} x dV(X)$ y $V(X)$ es la distribución de probabilidad de la cuantía de un siniestro. Sustituyendo en la ecuación (1), tendremos

$$Z = p \frac{\sqrt{n} c_1}{\sqrt{c_2}} \cdot \frac{1}{S_{\epsilon}} \quad (2)$$

Si fijamos ϵ , por ejemplo, en el nivel 0,05, nos resulta $S_{\epsilon} = 1,96$, en el supuesto de aproximación normal para F. El valor de \bar{n} que hace $Z = 1$, es decir, $Z(n_0) = 1$, será:

$$n_0 = \frac{S_{\epsilon}^2 c_2}{p^2 c_1^2} \quad (3)$$

Cuando la distribución $V(X)$ es causal, entonces el cociente c_2/c_1^2 es igual a uno, y los valores correspondientes a n_0 se pueden hallar aplicando las tablas de la distribución F. En el supuesto de aproximación normal para la distribución del daño total F, se tendrá el siguiente cuadro de valores de n_0 correspondientes a una credibilidad plena:

p \ ϵ	10%	5%	1%
0,01	27.057	38.416	66.347
0,05	1.082	1.537	2.654
0,1	271	384	663
0,2	68	96	166

En la mayoría de los casos, las cuantías de los siniestros no son, evidentemente, constantes, por lo que el cociente de c_2/c_1^2 es distinto de la unidad. Esta fracción dependerá del grado de heterogeneidad de los siniestros. De las ecuaciones (2) y (3), se puede obtener sin dificultad la siguiente expresión:

$$Z(n) = \sqrt{n} / \sqrt{n_0}$$

fórmula muy empleada para el cálculo de la credibilidad parcial en función de n . La experiencia práctica de numerosas entidades aseguradoras de los Estados Unidos ha probado que los valores de $Z(n)$ así calculados, cuya obtención pasa por la aproximación normal a la distribución del daño total F , son suficientemente satisfactorios.

A partir de las fórmulas de credibilidad parcial como la que acabamos de ver, se obtienen cuadros de credibilidad como el siguiente, referido al seguro de incendios, que tomamos de la obra de Hurley (1):

Factor (en %)	(En millones de dólares)		
de credibilidad	Domicilios	Centros comerciales	Centros fabriles
10	0,19	1',55	5,8
20	0,28	2,24	8,4
30	0,39	3,13	11,8
40	0,54	4,32	16,2
50	0,75	5,98	22,5
60	1,01	8,47	31,8
70	1,43	11,45	43,0
80	1,62	12,95	48,7
90	1,80	14,44	54,2
100	2,00	15,95	59,9

De acuerdo con estas cifras, se necesita un volumen de primas de dos millones de dólares en domicilios, cerca de 16 millones en centros comerciales y 60 millones en centros fabriles para que el porcentaje de credibilidad de la experiencia de siniestralidad sea total. Estas acusadas diferencias pueden explicarse en términos de homogeneidad del riesgo. Así, en el primer caso, los expuestos al riesgo son bastante homogéneos en valor y no suelen ser sujetos de pérdidas catastróficas, por lo que necesitamos una octava parte de primas respecto a los centros comerciales para obtener el mismo grado de credibilidad.

(1) Hurley, R.L.: A Credibility Framework for Ganging Fire Classification Experience. 1954.

Prosigamos con el estudio de la plena credibilidad. Para analizar la credibilidad plena, es preciso partir de un modelo matemático. Admitiendo la aproximación normal para la distribución del daño total, se puede plantear el problema de la siguiente forma:

$$p = P(|x - \mu| \leq k\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-k\mu}^{k\mu} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-t^2} dt$$

siendo p la probabilidad de que la observación x difiera de la media μ menos que k veces esa media, $k\mu$, y siendo x una variante $N(\mu, \sigma)$. Llamando $f(p) = k\mu/\sqrt{2}\sigma$, será $\sigma/\mu = k/\sqrt{2} f(p)$. Si ahora suponemos m observaciones, ésta última relación será: $\sigma/\sqrt{m} \mu = k/\sqrt{2} f(p)$ es decir,

$$m = \frac{2\sigma^2(f(p))^2}{\mu^2 k^2}$$

en donde m representa el número de observaciones precisas para la plena credibilidad. Este valor de m puede ser determinado tan pronto como σ y μ sean conocidos.

Cuando el volumen de datos no alcanza la credibilidad total, es preciso determinar la credibilidad parcial, es decir, el factor $Z(n)$ en función del número de datos observados, n . Algunas de las fórmulas propuestas son las siguientes:

$$Z(n) = \frac{n}{n+k} \quad ; \quad Z(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq n_0 \\ \sqrt{n/n_0} & \text{si } n < n_0 \end{cases}$$

en donde n_0 es el volumen de datos asociado a la plena credibilidad. La segunda de estas fórmulas, muy utilizada, ya la hemos obtenido anteriormente. La primera fué obtenida por Bailey, en su trabajo "A Generalized Theory of Credibility", al que ya nos hemos referido, a partir de la teoría de la regresión.

Posteriormente, otros autores han llegado a los mismos resultados. Entre ellos, citemos a Bichsel (1), quien también ha indicado la posibilidad de llegar a esta fórmula por el camino de la regresión lineal.

(1) Bichsel, Fritz: Experience rating in subsets of risks. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. III. Julio, 1967. Pag. 210-230

El camino seguido por Bailey es el siguiente: Consideremos las distribuciones:

$$P(k/\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{d } S(\lambda) = \gamma(\lambda, a, b)$$

con parámetros: media = λ media = a
 varianza = λ varianza = ab

De la distribución conjunta $h(\lambda, k) = P(k/\lambda) d S(\lambda)$ se obtiene la marginal de k , es decir:

$$P_k = \int_0^{\infty} P(k/\lambda) d S(\lambda) = \Psi(k, a, b)$$

que es la distribución binomial negativa, con parámetros: Media = a ; varianza = $a(1+b)$. Con ello, la distribución condicionada de λ a k será:

$$g(\lambda/k) = \frac{P(k/\lambda) d S(\lambda)}{P_k} \equiv \gamma\left(\lambda, \frac{a+bk}{1+b}, \frac{b}{1+b}\right)$$

es decir, con media $\frac{a+bk}{1+b}$. Por tanto:

$$E(\lambda/k) = \left(1 - \frac{b}{1+b}\right) a + \frac{b}{1+b} k = (1-Z) E(\lambda) + Zk$$

$$\text{siendo: } Z = \frac{ab}{a+ab} = \frac{\text{Var}(\lambda)}{\text{Var}(\lambda) + E\{\text{Var}(k)\}}$$

Si se suponen n observaciones con frecuencia k/n , se tendrá que:

$$Z = \frac{n}{n + E\{\text{Var}(k)\} / \text{Var}(\lambda)} = \frac{n}{n+k}$$

En este caso concreto, se ha podido llegar a este resultado debido a que, en las distribuciones que hemos manejado, se verifica:

$E(\lambda) = E(k)$, es decir:

$$E(\lambda/k) = E(\lambda) + \frac{\text{Cov}(\lambda, k)}{\text{Var}(k)} \{k - E(\lambda)\} = \left(1 - \frac{\text{Cov}(\lambda, k)}{\text{Var}(k)}\right) E(\lambda) + \frac{\text{Cov}(\lambda, k)}{\text{Var}(k)} k$$

Ello nos permite llegar a la conclusión de que estos resultados son posibles debido a las hipótesis de partida: Estar razonando con un proceso de Polya. En general, para hablar de regresión li-

neal tendrá que ser en sentido amplio, pues $E(\lambda/k)$ puede no ser una función lineal. Por otra parte, para llegar a la fórmula de la credibilidad es preciso que se cumpla $E(\lambda) \neq E(k)$, o, lo que es lo mismo, $E\{E(\lambda/k)\} = E(k)$, es decir, que la media de la distribución del número de siniestros después de introducir la función de estructura no resulte afectada por la heterogeneidad del grupo, lo cual no siempre sucede.

Formulación Bayesiana del problema

Tanto la famosa fórmula de la credibilidad, a la que tantas veces nos hemos referido, como la fijación del valor del factor de credibilidad Z en muchas fórmulas prácticas, responden más bien a intuiciones que a planteamientos rigurosos del problema. Pero, como dice Bruno de Finetti, la justa intuición de los problemas que dieron lugar a esta teoría no es suficiente justificación. Estima este autor que el problema encaja perfectamente en los planteamientos bayesianos, únicos valederos para fundamentar las ideas sobre credibilidad.

Planteamiento del problema: Consideremos con Buhlmann ("Experience Rating and Credibility", al que nos hemos referido varias veces) un conjunto Ω de riesgos, cada uno de los cuales tiene un parámetro θ . Cada riesgo individual puede ser observado sobre un número de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n , que se pueden suponer estocásticamente independientes. Representando por $F_\theta(x)$ la distribución común, con media $\mu(\theta)$ y varianza $\sigma^2(\theta)$, el problema consiste en hacer estimaciones para $\mu(\theta)$ basadas sobre las observaciones X_1, X_2, \dots, X_n . El estimador de $\mu(\theta)$ viene dado por $E(\mu(\theta)/X_1, X_2, \dots, X_n)$, que no es más que un estimador bayesiano, en donde la función de pérdida elegida es:

$$L(\mu(\theta), f) = \{\mu(\theta) - f(X_1, X_2, \dots, X_n)\}^2$$

Si hubiéramos elegido como función de pérdida $L = |\mu(\theta) - f|$, se obtendría como estimador bayesiano la mediana de la distribución a posteriori, en vez de la media de dicha distribución. Vemos, pues,

que se trata de estimadores bayesianos que minimizan la esperanza de pérdida condicionada a posteriori.

No obstante, hay que dar entrada a un principio actuarial con arreglo a la siguiente idea básica: Es preciso conseguir el equilibrio en todas aquellas subclases de la Cartera, las cuales son caracterizadas únicamente por la experiencia, de tal forma que cada clase de riesgos con los mismos resultados pague de forma propia. En base a esta idea, sugerida por Thyron a Bühlmann, éste llega también al estimador $E(\mu(\theta)/X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Estas consideraciones son las que han llevado a la formación de clases homogéneas. Por eso dice Aribaud, en su trabajo "Nota sobre el empleo de leyes paramétricas. La prima modelada y la personalización de los riesgos en el seguro del automóvil" (Boletín del Instituto de Actuarios Franceses. Marzo, 1964), que las expresiones "prima de los riesgos" no son muy acertadas.

Veamos como plantea el problema Bichsel. Considera un conjunto de riesgos B, el cual está dividido en subconjuntos B_i , de acuerdo con alguna propiedad (profesión región, etc.). Los conjuntos B_i se consideran demasiado pequeños para permitir, a partir de su propia experiencia, el cálculo de la prima. Por otra parte, se supone que existen diferencias entre los B_i . El problema consiste en dar una solución a cómo ha de ser combinada la experiencia de B_i con la del conjunto total B.

La fórmula de la credibilidad se puede obtener, ahora, como la mejor aproximación lineal de $E(\mu/(X_1, X_2, \dots, X_n))$. Es decir, $a+b\bar{X}$, tal que $E\{E(\mu(\theta)/X_1, X_2, \dots, X_n) - a - b\bar{X}\}^2 = \min$. Ello supone que $\phi = E\{\mu(\theta) - a - b\bar{X}\}^2 = \min$. De $\phi_a = 0$ se obtiene:

$a = E\{\mu(\theta) - b E(\bar{X})\} = (1-b) E\{\mu(\theta)\}$, que sustituido en ϕ nos da:

$\phi = E\{\mu(\theta) - (1-b) E\{\mu(\theta)\} - b\bar{X}\}^2 = E\{\{\mu(\theta) - E\{\mu(\theta)\}\} - b(\bar{X} - E\{\mu(\theta)\})\}^2$, que se hace mínimo para:

$$b = \frac{E\{(\mu(\theta) - E\{\mu(\theta)\})(\bar{X} - E\{\mu(\theta)\})\}}{E\{\bar{X} - E\{\mu(\theta)\}\}^2} = \frac{E_{\theta}\{(\mu - E(\mu)) E_{\bar{X}}\{\bar{X} - E(\mu)\}\}}{E\{(\bar{X} - \mu) + (\mu - E(\mu))\}^2} = \frac{\text{Var}\{\mu(\theta)\}}{E(\bar{X} - \mu)^2 + \text{Var } \mu(\theta)}$$

Admitiendo que las variables muestrales son independientes, será:

$$E(\bar{X}-\mu)^2 = \frac{1}{n^2} E_{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{E\sigma^2(\theta)}{n}$$

de donde:

$$b = \frac{n}{n + E\sigma^2(\theta) / \text{Var } \mu(\theta)} = \frac{n}{n+k} = Z$$

es decir:

$$(1-Z) E\{\mu(\theta)\} + Z \bar{X}$$

A estos resultados se ha llegado sin hacer hipótesis alguna sobre las distribuciones de probabilidad, tanto del riesgo como sobre la distribución de estructura.

Credibilidad y Fiabilidad

Si la Credibilidad consiste en el grado de aceptabilidad de la nueva información, en términos de probabilidad, se tiene que la Fiabilidad supone la probabilidad de que la estructura definida por la información anterior continúa vigente. En principio, ambos conceptos se contraponen, ya que el primero se refiere al valor de la nueva información, para modificar la situación anterior, mientras que el segundo supone la negación de esta nueva información. Por otra parte, se complementan, toda vez que no se puede hablar en términos absolutos, y se precisan soluciones intermedias, cuya ponderación dependerá de las probabilidades que midan los grados de credibilidad y fiabilidad.

Para la estimación de la fiabilidad, el profesor Angel Vegas Pérez, en su trabajo "Aplicaciones actuariales de las teorías de la fiabilidad y de la credibilidad", ha procedido de la siguiente forma: Siendo α el nivel de significación correspondiente a la región crítica ω , para el contraste de la hipótesis $\theta = \theta_0$, tendremos: $\int_{\omega} dF_{\theta}(x) = \alpha$, en una muestra de tamaño n : X_1, X_2, \dots, X_n . Si r de estos valores muestrales no pertenece a ω , se estima la fiabilidad por $f = r/n$. Si ahora N es el tamaño de una muestra fic-

ticia, realizada en la situación cuya permanencia se supone con probabilidad $1-\alpha$, siendo $R = N(1-\alpha)$ el número de casos aue en la muestra simulada de tamaño N son congruentes con la hipótesis de vigencia de la situación antigua, entonces la fiabilidad se estima por la relación: $f = (r+R)/(n+N)$. El parámetro θ se estima, ahora, por: $= f \theta_0 + (1-f) \theta_1$. Con ello, el autor, no sólo tiene en cuenta la credibilidad de la muestra sino también la probabilidad de permanencia de la situación con un cierto nivel de significación.

Aplicación de la Credibilidad a la tarificación

Ya Bailey había puntualizado que hay dos clases de credibilidad, la referente a la revisión de tarifas y la utilizada en los planes de tarificación según experiencia (experience rating). En el primer caso, se trata de una tarificación a priori, en la que se va dando entrada a las nuevas experiencias, generalmente con la finalidad de revisar los niveles de la tarifa vigente.

Según Longley-Cook, los planes de "experience rating" son tan variados que no se puede prescindir del importante papel que juega la competencia en su diseño, existiendo dudas de que la mayoría de las fórmulas den credibilidad suficiente para la experiencia individual, para que merezcan el calificativo de muy precisas.

Como ya hemos visto, un plan de tarificación según experiencia proporciona un ajuste de la tarifa normal (manual rate) encaminado a reflejar las experiencias individuales del riesgo. En la forma más general, se puede escribir:

$$\text{Prima Normal } \left\{ 1 - Z + Z \frac{A}{E} \right\}$$

en donde A y E son la pérdida real y la esperada, respectivamente. Las fórmulas aplicadas en casos concretos no son, a veces, tan simples.

Una aplicación interesante de la teoría de la credibilidad al sistema de tarificación "merit rating" es la de Bailey-Simon, en su trabajo "Two Studies in Automobile Insurance Ratemarking "(1).

(1) Bailey, Robert A.- Le Roy Simon: Two Studies in Automobile Insurance Ratemarking. Tha Astin Bulletin. Vol. I, Pat. IV. Diciembre, 1960
Pag. 192-217

Control dinámico de una tarifa

Todo lo que precede nos lleva de la mano a considerar el problema de la tarificación como un sistema dinámico, cuyos estados dependen no solamente de las perturbaciones aleatorias, sino también de las variables de decisión. El problema de actualizar la tarifa en base a la nueva información, nos lleva a considerar que estamos ante un sistema dinámico, estocástico y adaptativo. El control de la tarifa no es más que el control de un tal sistema, cuyas políticas óptimas son de tipo bayesiano.

PLAN DE CREDIBILIDAD

Como hemos venido indicando, la teoría de la credibilidad trata esencialmente de determinar qué grado de ponderación se debe dar a la evidencia observada. Por esta razón, la mayoría de los autores que tratan estas cuestiones definen la prima de credibilidad como la aproximación de la prima de riesgo por medio de una función dependiente de la siniestralidad real sufrida por ese determinado riesgo.

Siguiendo a Jesús Vegas Asensio, en su trabajo "Aplicación de la teoría de la credibilidad a la tarificación de riesgos", en los términos de la rigurosa modelización establecida por Hans Bühlmann en su obra "Mathematical Methods in Risk Theory", consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $P(\theta)$ la prima de riesgo del parámetro θ , calculada de acuerdo con alguno de los conocidos principios (del valor esperado, mínima varianza, etc.). Representemos por S_1, S_2, \dots, S_n la siniestralidad total del riesgo en los periodos $1, 2, \dots, n$, respectivamente (hemos supuesto que dividimos el tiempo de observación en n periodos). Se considera, por hipótesis, que se conoce la función de estructura $U(\theta)$ del colectivo, así como la prima del mismo, P . El problema entonces es calcular la prima de credibilidad $P_{n+1}(S_1, S_2, \dots, S_n)$, que sirve de aproximación de $P(\theta)$.

En su concepción clásica la teoría de la Credibilidad, para obtener $P_{n+1}(S_1, S_2, \dots, S_n)$, se basa en el principio del valor esperado. Sin embargo, es también posible extender la teoría de la credibilidad al principio de la varianza. Este segundo sistema tiene la inmensa ventaja de que no sólo estima la siniestralidad media del riesgo, sino que nos proporciona también el recargo de seguridad que debe llevar la prima pura para atender a las desviaciones aleatorias de la siniestralidad.

De acuerdo con el principio del valor esperado, podemos poner, para $\lambda = 0$:

$$\text{Prima de riesgo} = P(\theta) = \mu(\theta)$$

$$\text{Prima de colectivo } P = E\{\mu(\theta)\}$$

donde $E\{\mu(\theta)\}$ está referida a la función de estructura, $U(\theta)$. Formalmente tenemos que:

$$\Psi\{F^{(\theta)}(x, t)\} = \Psi\{S/\theta\} = P(\theta)$$

$$\Psi\{F(x, t)\} = \Psi\{S\} = P$$

La prima de riesgo se obtiene cuando el cálculo de primas se basa en la distribución de S para un valor dado, y la prima colectiva es la que se obtiene de la distribución no condicionada de S . De forma explícita, resulta:

$$\Psi\{S/\theta\} = P(\theta) = E(S/\theta)$$

$$\Psi\{S\} = P = E(S)$$

Ahora podemos definir para cualquier variable aleatoria Y , definida en el espacio de probabilidad $\Pi\Omega$

$$\Psi\{S/Y\} = P(Y) = E(S/Y)$$

El espacio producto $\Pi\Omega$ aparece como el "espacio de probabilidad natural" de las variantes S e Y (Π = conjunto de todos los posibles valores de S , Ω = conjunto de todos los posibles riesgos θ). La probabilidad W en este espacio producto viene del elemento infinitesimal $dF^{(\theta)}(S) dU(\theta)$.

Volviendo nuevamente al ejercicio planteado anteriormente, se trata de estimar la prima de riesgo $P(\theta)$ para el periodo $n+1$, conocida la siniestralidad de cada uno de los periodos anteriores,

S_1, S_2, \dots, S_n . Representando por S la variable aleatoria que expresa la siniestralidad acumulada del periodo $n+1$, tenemos que la prima de riesgo (correspondiente al periodo $n+1$) es: $P(\theta) = \Psi \{S/\theta\}$

Por analogía, se define la prima de credibilidad como:

$$P_{n+1}(S_1, S_2, \dots, S_n) = \Psi \{P(\theta)/S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

es decir, una estimación de la prima del riesgo, conocida la siniestralidad real ocurrida S_1, S_2, \dots, S_n .

Estas expresiones pueden ser análogamente explicadas en el espacio probabilístico $\Pi\Omega$, siendo Π el conjunto de todos los posibles valores de la sucesión de $n+1$ variantes S_1, S_2, \dots, S_n, S . La probabilidad infinitesimal inducida será: $dW = dF^\theta(S_1, S_2, \dots, S_n, S) \notin V(\theta)$. En el caso de que las variables S_1, S_2, \dots, S_n sean independientes de S en el periodo $n+1$, podemos entonces anunciar el siguiente

Teorema fundamental

Si S y (S_1, S_2, \dots, S_n) son estocásticamente independientes para un valor dado del parámetro θ , entonces:

$$P_{n+1}(S_1, S_2, \dots, S_n) = \Psi\{S/S_1 S_2 \dots S_n\}$$

Demostración:

$$P(\theta, S_1, S_2, \dots, S_n) = \Psi(S/\theta, S_1, S_2, \dots, S_n) = \Psi(S/\theta) = P(\theta)$$

y $P_{n+1}(S_1, S_2, \dots, S_n) = \Psi(P(\theta)/S_1, S_2, \dots, S_n)$ por definición.

Luego: $\Psi(P(\theta)/S_1, S_2, \dots, S_n) = \Psi\{P(\theta, S_1, S_2, \dots, S_n)/f(\theta, S_1, S_2, \dots, S_n)\}$

con $f(\theta, S_1, S_2, \dots, S_n) = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ resulta $\Psi\{P(\theta, S_1, S_2, \dots, S_n)/f(S_1, S_2, \dots, S_n)\} = \Psi\{S/f(\theta, S_1, S_2, \dots, S_n)\} = \Psi(S/S_1, S_2, \dots, S_n)$, de acuerdo con el principio de iteratividad del valor esperado (para $\lambda = 0$). En resumen, hemos obtenido que

$$P_{n+1}(S_1, S_2, \dots, S_n) = E \{ \mu(\theta)(S_1, S_2, \dots, S_n) \}$$

de donde se deduce que la prima de credibilidad es igual a la prima colectiva cuando no hay información de la siniestralidad real producida ($n=0$), y converge en la prima verdadera $P(\theta)$ para un largo periodo de observación ($n \rightarrow \infty$).

Esta propiedad sirve de base a los Sistemas de Tarificación "a posteriori" o "experience rating", en que la prima inicial, (generalmente obtenida con criterios objetivos) se va modelando sucesivamente a medida que se la va incorporando la información de la siniestralidad real que va teniendo cada objeto asegurado. De esta forma, la prima modelada o "a posteriori" es una media ponderada de la media "a priori" (objetiva) y de la información de la siniestralidad. Es decir, está configurada como un verdadero proceso bayesiano de aprendizaje.

Con objeto de tener fórmulas prácticas, vamos a aproximar $E\{\mu(\theta)/S_1, S_2, \dots, S_n\}$ mediante la expresión lineal: $a + b(S_1 S_2 \dots S_n)$ $n = a + b \bar{S}$, de forma que la pérdida cuadrática media sea mínima, es decir, se trata de un estimador bayesiano que minimiza la esperanza de pérdida condicionada "a posteriori", luego la expresión: $E\{E\{\mu(\theta)/S_1, S_2, \dots, S_n\} - (a + b\bar{S})\}^2\}$ ha de ser mínima. Es fácil notar que la función $a + b \bar{S}$ también minimiza $E\{(\mu(\theta) - (a + b\bar{S}))^2\} = E\{(\mu(\theta) - E\{\mu(\theta)/S_1, S_2, \dots, S_n\} - (a + b\bar{S}))^2\}$, y también $E\{b(\mu(\theta) - \bar{S})^2\} + E\{(1-b)\mu(\theta) - a\}^2$. Cada par de valores (a,b) que hace mínima la anterior expresión es también solución del problema inicial. En resumen, tenemos que: $a = (1-b) E\{\mu(\theta)\}$, y deseamos minimizar $b^2 E\{(\bar{S} - \mu(\theta))^2\} + 1(1-b)^2 \text{Var}\{\mu(\theta)\}$, extremal que se cumple para:

$$b = \frac{\text{Var}\{\mu(\theta)\}}{\text{Var}(\bar{S})} = \frac{\text{Var}\{\mu(\theta)\}}{E\{(\bar{S} - \mu(\theta))^2\} + \text{Var}\{\mu(\theta)\}}$$

De la relación: $\text{Var}(\bar{S}) = E\{\text{Var}(S/\theta)\} + \text{Var}\{E(S/\theta)\}$

se obtiene:

$$\text{Var}(\bar{S}) = \frac{1}{n} E\{\sigma^2(\theta)\} + \text{Var}\{\mu(\theta)\}, \text{ con lo que tenemos la}$$

fórmula de la credibilidad:

$$E\{\mu(\theta)/S_1, S_2, \dots, S_n\} = b \bar{S} + (1-b) E\{\mu(\theta)\}$$

donde b es el coeficiente de credibilidad, que se calcula haciendo:

$$b = \frac{\text{Var}\{\mu(\theta)\}}{\text{Var}(\bar{S})} = \frac{\text{Var}\{\mu(\theta)\}}{(1/n) E\{\sigma^2(\theta)\} + \text{Var}\{\mu(\theta)\}} = \frac{n}{n+k}$$

$$\text{con } k = \frac{E\{\sigma^2(\theta)\}}{\text{Var}\{\mu(\theta)\}}$$

El denominador del cociente $\frac{\text{Var } \{\mu(\theta)\}}{\text{Var } (\bar{S})}$ es por naturaleza estimable

a través del colectivo, luego hemos de operar con el numerador. De

$$\text{Var } (\bar{S}) = \frac{1}{n} E \{ \sigma^2(\theta) \} + \text{Var } \{ \mu(\theta) \}$$

$$\text{y } \text{Var } (S) = E \{ \sigma^2(\theta) \} + \text{Var } \{ \mu(\theta) \}$$

se deduce que: $n \text{Var } (\bar{S}) - \text{Var } (S) = (n-1) \text{Var } \{ \mu(\theta) \}$

operando, resulta:

$$b = \frac{n \text{Var } (\bar{S}) - \text{Var } (S)}{(n-1) \text{Var } (\bar{S})}$$

donde:

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} \quad ; \quad n \geq 2, \quad S_1 = S_1.$$

En esta fórmula ya sólo tenemos variables que se pueden estimar a través del colectivo. Naturalmente que la aplicación práctica de esta expresión requiere la disponibilidad de una estadística por período adecuada acerca del colectivo en cuestión, y, mejor aún, que cubra n periodos de observación.

Por tanto, de esta fórmula hemos obtenido la solución óptima del sistema de tarifas, teniendo en cuenta que el subsistema de información técnica sólo nos proporciona información acerca del colectivo.

La obtención de b a partir de los datos correspondientes a un sólo periodo es únicamente posible si existe una relación funcional entre $\mu(\theta)$ y $\sigma^2(\theta)$ en la distribución de S para un riesgo dado θ . La ley de Poisson verifica esta condición, ya que cumple que: $\sigma^2(\theta) = \mu(\theta) = \theta$, y por tanto:

$$E \{ \sigma^2(\theta) \} = E \{ \mu(\theta) \} = E(\theta)$$

$$\text{Var } \{ \mu(\theta) \} = \text{Var } (\bar{S}) - E(\bar{S})/n$$

El coeficiente de credibilidad es entonces:

$$b = \frac{n \text{Var } (\bar{S}) - E(\bar{S})}{n \text{Var } (\bar{S})} = \frac{\text{"exceso de varianza"}}{\text{"Varianza"}}$$

La denominación "exceso de varianza" proviene del hecho de que, en el caso de Poisson simple, $\text{Var } (\bar{S}) = E(\bar{S})/n$.

Finalmente, debemos mencionar el problema; hasta ahora eludido, de que, en las transformaciones que hemos efectuado para poder calcular en la práctica la prima de credibilidad a través de datos estadísticos tomados del colectivo, el objetivo debe ser establecer aquella transformación que nos dé una estimación óptima de la prima de credibilidad. Los modernos estudios de la Teoría de la Credibilidad van dirigidos por este camino.

III.4.- EL RECARGO DE SEGURIDAD

En el estudio de los componentes del precio del esguero, nos aparece, en segundo lugar, el Recargo de Seguridad λ , que aplicado sobre la prima pura o de riesgo nos permite obtener la prima recargada, es decir:

$$P_r = P + \lambda P$$

siendo P la prima pura o prima de riesgo y λ el Recargo de Seguridad.

Según hemos visto anteriormente, el cálculo de P se basa en el principio de equivalencia, mientras que el cálculo de λ se basa en principios de estabilidad, ya que el recargo de seguridad (λ), en nivel de reaseguro (M) y las Reservas de Estabilización en su sentido más general (S) (incluyendo las Reservas Patrimoniales del Ente Asegurador), constituyen los tres elementos que componen el subsistema de estabilidad de la empresa de seguros, de acuerdo con el esquema que se refleja en el punto I.3. de este trabajo.

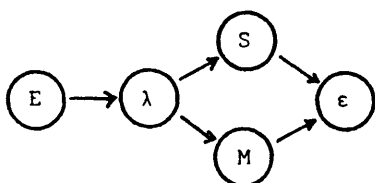
El Recargo de Seguridad λ puede venir dado de forma implícita (Bases de Primer Orden) en la prima de riesgo, ó bien puede obtenerse de forma explícita (Bases de Segundo Orden), en cuyo caso, sumado a la prima de riesgo, nos origina la prima recargada.

En el mercado español del Seguro prevalecen, en la mayoría de los Ramos, las primas calculadas con Bases de Primer Orden (Tablas de Mortalidad desfasadas, estimaciones indirectas de los riesgos, etc.). Tal es el caso de las tarifas vigentes en el Seguro Obligatorio del Automóvil, Seguro Voluntario, Incendios (Riesgos sencillos e industriales), Robo y Expoliación, Vida, etc.

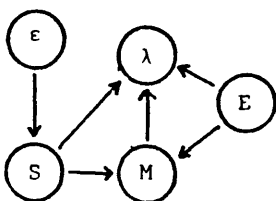
Este recargo implícito tiene el inconveniente de que no responde a principios técnicos de acuerdo con la estructura de cada empresa; lo que sucede entonces es que la estabilidad se consigue a costa de un elevado precio del Servicio de Seguridad.

Sin embargo la evolución del sector asegurador tiende hacia criterios de eficacia económica dentro de un marco de competencia, ambiente cuya información condiciona y obliga al ajuste de los costes (incluido el Recargo de Seguridad) a fin de obtener precios competitivos.

Volviendo al grafo de los sistemas básicos de una empresa de seguros que se establecía en la parte de Introducción, epígrafe I.3., de acuerdo a como vengan los flujos de información del subsistema de estabilidad, el recargo λ puede ser un dato, en cuyo caso tendríamos:



o bien una variable de decisión, en cuyo caso el grafo podría representarse de la siguiente forma:



siendo E el subsistema de información económica de la empresa.

El primer caso podría corresponder, por ejemplo, al de un mercado de primas uniformes, calculadas con base de primer orden, es decir, en donde el margen de seguridad aparece en forma implícita y es, en consecuencia, un dato.

III.4.1.- FIJACION DE LA CUANTIA DEL RECARGO DE SEGURIDAD

El problema se presenta en los siguientes términos:

Dadas las restantes magnitudes del subsistema de estabilidad (Reaseguro y Reserva de Estabilización), que constituyen entradas de información, se trata de calcular el nivel de la variable de deci-

sión λ . La elección de la función de transferencia puede responder a criterios de Estabilidad, Económicos o basados en un orden de preferencia.

I.- Criterios de Estabilidad

Distinguiremos los siguientes casos, siguiendo a Nieto de Alba en su trabajo "Concepción Cibernética en la Dirección Actuarial de la Empresa de Seguros":

A) Integrando toda la cartera.- De acuerdo con el modelo de la Teoría del Riesgo Colectivo, la prima con el Recargo de Seguridad sería:

$$P_r = (1+\lambda) P$$

siendo

$$P = E(X) = \int_0^{\infty} x \, dF(x, t) = t \cdot C_1$$

y el Recargo de Seguridad se puede calcular con arreglo a uno de los siguientes criterios:

Criterio F.: Siendo $1-\epsilon$ el coeficiente de seguridad, el valor de λ se obtendrá de:

$$F\{(1+\lambda) P + S, t\} = 1 - \epsilon$$

Criterio Ψ . : Dado R a través de la relación:

$$\Psi = e^{-RS} = \epsilon \text{ (Probabilidad de ruina)}$$

el valor de λ se obtiene de la condición

$$E \{ e^{-R\{(1+\lambda) C_1 t - x\}} \} = 1$$

o también de la relación:

$$\int_0^{\infty} e^{RZ} f(Z) \, dZ = 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)R C_1 t/h}}{t/h}$$

Los resultados anteriores tienen validez para el total de una Cartera, o bien para Cartera parcial limitada a un ramo.

Pero teniendo en cuenta que en la práctica se dispone de información de las Carteras parciales, se presenta el problema de fijar la distribución de la totalidad a partir de las correspondien-

tes distribuciones de las Carteras parciales. Para ello es preciso tener en cuenta:

a/ Que las Carteras parciales sean estocásticamente independientes. En tal caso se tiene:

$$F_1(x; t_1) = \sum e^{-t_1} \frac{t_1^n}{n!} v_1^{n*}(x) \dots \text{ Cartera parcial } C_1$$

$$\dots$$

$$F_m(x; t_m) = \sum e^{-t_m} \frac{t_m^n}{n!} v_m^{n*}(x) \dots \text{ Cartera parcial } C_m$$

$$F(x; t) = \sum e^{-t} \frac{t^n}{n!} v^{n*}(x) \dots \text{ Cartera total}$$

siendo:

$$t = \sum_{i=1}^m t_i; \quad f(z) = \frac{t_1 f_1(z) + \dots + t_m f_m(z)}{t_1 + t_2 + \dots + t_m}; \quad V(x) = \int_0^x f(z) dz$$

b/ Que se trate de Carteras parcialmente dependientes. En este caso, el problema se complica a efectos prácticos.

Una solución interesante es la que da Ammeter (1) mediante la cual, este caso queda comprendido en el canteior. Parte de dos Carteras C_A y C_B , las cuales subdivide a su vez en dos Carteras ficticias:



de estas cuatro Carteras parciales solamente hay dependencia en las subcarteras $\phi(A)$ y $\phi(B)$. Con ello se llega a tres Carteras parciales independientes con arreglo a los siguientes elementos de cálculo:

(1) Ammeter, H.: Anveudungen der Kollektiven Risikotheory auf Probleme der Risikopolitik in der Sachversicherung. XV. Congreso Internacional de Actuarios. New York, 1957.

Carteras	C_1	C_2	C_3
Nº de siniestros	$\phi(A) t_A$	$\phi(B) t_B$	$\phi(A)t_A + \phi(B)t_B$
Coefficiente de fluctuación...	h_1	h_2	h_3

en donde los coeficientes h_1 , h_2 y h_3 satisfacen

$$t_A + \frac{t_A^2}{h_A} = t_A + \frac{\phi(A)^2 t_A^2}{h_1} + \frac{\phi(A)^2 t_A^2}{h_3}$$

$$t_B + \frac{t_B^2}{h_B} = t_B + \frac{\phi(B)^2 t_B^2}{h_2} + \frac{\phi(B)^2 t_B^2}{h_3}$$

$$t_A + \frac{t_{A+B}^2}{h_{A+B}} = t_{A+B} + \frac{\phi(A)^2 t_A^2}{h_1} + \frac{\phi(B)^2 t_B^2}{h_2} + \frac{(\phi(A)t_A + \phi(B)t_B)^2}{h_3}$$

B) Tarificación según las Carteras parciales.- Por razones prácticas y de competencia se impone una tarificación de acuerdo con las Carteras parciales.

Consideramos las siguientes Carteras parciales independientes (cuando no lo sean se pueden hacer las transformaciones de Ammeter):

<u>Cartera</u>	<u>t</u>	<u>Coste medio</u>	<u>λ</u>	<u>h</u>
C_1	t_1	\bar{C}_1	λ_1	h_1
C_2	t_2	\bar{C}_2	λ_2	h_2
..
.
.
C_m	t_m	\bar{C}_m	λ_m	h_m

Dadas las reservas de estabilización y la probabilidad de ruina de la Cartera total, se podrá calcular el coeficiente de compensación R. Si la ganancia total es:

$$Y = \sum_{i=1}^m Y_i$$

y su función característica:

$$\prod_{i=1}^m \phi_r(\tau, t_r)$$

tendremos la siguiente ecuación que permite calcular $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda_1)t_1 \bar{C}_1 e^{-RY_{dF_1}} \int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda_2)t_2 \bar{C}_2 e^{-RY_{dF_2}} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda_m)t_m \bar{C}_m e^{-RY_{dF_m}} = 1$$

Tarificación natural:

Estamos ante la misma cuando los recargos de seguridad se calculan separadamente para cada Cartera, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda_r)t_r \bar{C}_r e^{-RY_{dF_r}} = 1$$

En esta tarificación no desempeña ningún papel el resto de las Carteras. Se puede decir que con dicho método se consigue la estabilidad compatible con la máxima equidad de la prima.

Teniendo en cuenta solamente la estabilidad se pueden llegar a valores de $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$ que satisfagan la condición anterior y supongan otros tantos criterios de tarificación.

Esta posibilidad de elección permite definir políticas de tarificación de acuerdo con el mercado. Veamos las siguientes aplicaciones:

a/ Si se conoce que la función de demanda de cada modalidad depende de λ_i , es decir, $n(\lambda_i)$, se puede hacer la elección de forma que:

$$Z = \sum \lambda_i n(\lambda_i) = \text{máx.}$$

Este planteamiento es más actuarial que el hecho por Bohman (1).

Considerando los siguientes datos:

\bar{p}_n = prima cobrada por el grupo G_n .

q_n = prima necesaria según el coste de la Compañía.

$L_n(p)$ = Proporción del tamaño del mercado que demanda seguros al precio p .

$F_n(p)$ = Función de demanda.

Las primas que recauda la Compañía serán:

(1) Bohman, Herald: Experience Rating when the company aims to increase the volume of its Business. The Astin Bulletin. Vol. IV, Part. III. Julio, 1967. Pag. 208-209

$$P = \sum_{n=1}^N L_n F(p_n) P_n$$

Que la Compañía debe hacer máxima con la condición:

$$P \leq A = \sum L_n F(p_n) q_n$$

si estimamos que $p_n - q_n = \lambda_n$ y consideramos que $L_n F(p_n) = n(\lambda_n)$, tenemos el modelo Bohman como un caso particular del planteamiento del Dr. Nieto de Alba, en donde se da entrada a la estabilidad de la empresa como ecuación de condición.

En esta solución, además aparece la expansión de la empresa en función de su dimensión técnica.

b/ También puede encontrar aplicación una tarificación no natural en aquellos casos en que se produce una ampliación de Cartera y al no disponer de experiencia propia puede ser aconsejable prestar atención especial a la estabilidad.

II.- Criterios Económicos:

La indeterminación técnica que nos aparece en los criterios de estabilidad se puede resolver con criterios económicos. Dada la función de demanda $n(\lambda_i)$ el problema será:

$$Z = \sum_{i=1}^m \lambda_i n(\lambda_i) = \text{máx.}$$

con la condición:

$$\prod_{r=1}^m e^{-R(1+\lambda_r)t_r C_r} \int_0^{\infty} e^{RX} dF(x,t) = 1$$

o también:

$$R \sum (1+\lambda_r) t_r C_r = \sum \lambda_n \int_0^{\infty} e^{RX} dF(x,t)$$

siendo:

$$\int_0^{\infty} e^{RX} dF(x,t) = \phi_n\{V(R)\} = \begin{cases} e^{t\{V(R)-1\}} & (\text{Poisson}) \\ \{1 - \frac{t}{h}\{V(R)-1\}\}^{-h} & (\text{Binomial Negativa}) \end{cases}$$

es decir, la función generatriz, de la distribución de las cuantías,

$$\int_0^{\infty} e^{Rz} f(z) dz = \begin{cases} 1 + (1+\lambda) R \bar{C}_1 & \text{(Poisson)} \\ 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda) R \bar{C}_1 \cdot t/h}}{t/h} & \text{(Binomial Negativa)} \end{cases}$$

III.- Criterios basados en un orden de preferencia:

Teniendo en cuenta que las decisiones del asegurador influyen en el beneficio, el cual viene dado por una variable aleatoria con una determinada distribución de probabilidad, ello supone que el empresario debe disponer de un criterio que le permita elegir la mejor distribución o la preferencia entre las posibles.

Con la finalidad de establecer un orden de preferencia para el empresario de seguros consideremos previamente lo que se llama:

Situación de riesgo:

Se caracteriza por los elementos (R,F) siendo:

$$R = R_0 + \lambda p; \quad p = \int_0^{\infty} x dF(x)$$

La distribución del beneficio z vendrá dada por:

$$G(z) = 1 - F\{R + P - z\}$$

El problema consiste en obtener una regla que nos permita comparar situaciones de riesgo (R,F) y decir cuándo una situación es mejor que otra.

Este problema ha sido estudiado especialmente por Borch, principalmente en los trabajos:

- Reciprocal Reinsurance Treaties seen as a two-person co-operative Game. Skand Aktuar. 1960. N° 1 y 2.
- The Utility Concept Appliend to the Theory of Insurance. The Astin Bulletin. Vol. I, Part. V. Julio, 1961. Pag. 245-255
- La teoría Económica y el Seguro. Anales del Instituto de Actuarios Españoles. n° 4. 1964. Pag. 99-126
- Utility Theory. Trans. Soc. Actuarires. 1969.

En el primer trabajo citado, Borh sigue a Von Nauman y Morgenstern y de acuerdo con la formulación más simplificada de Marschak (generalizada por Herstein y Milnor). Después de definir el Conjunto de distribuciones G y la relación de orden, establece cuatro axiomas que le permiten llegar a:

$$U\{G(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dG(x)$$

en donde $U(X)$ puede ser interpretada como la utilidad del dinero.

En el segundo de los trabajos citados llega a estos mismos resultados en base a dos axiomas solamente, para lo cual se apoya, en la admisión del principio de equivalencia entre sucesos ciertos e inciertos que constituye el punto inicial y más debatido de la teoría de la utilidad.

Estos axiomas son:

1/ Un asegurador tiene un orden de preferencia completo sobre el conjunto de distribuciones de probabilidad P^* de forma que:

a) A cualquier $F(x) \in P^*$ corresponda un y sólo un número R tal que $F(x)$ y $E(X-R)$ son distribuciones equivalentes.

b) $E(X-R_1)$ es preferida a $E(X-R_2)$ si y sólo si $R_1 > R_2$.
 $E(X)$ es la distribución de probabilidad $E(X) = 0$ para $X < 0$,
 $E(X) = 1$ para $0 \leq X$.

Al asociar un índice de utilidad a cada función de distribución $F(x)$ es decir $U\{F(x)\}$ y establecer:

$U\{F(x)\} = U\{G(x)\}$ si $F(x)$ y $G(x)$ son equivalentes.

$U\{F(x)\} > U\{G(x)\}$ si $F(x)$ es preferida a $G(x)$

postula la equivalencia entre el orden de preferencia y la utilidad

2/ Este segundo axioma dice que si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son equivalentes entonces $\gamma F_1(x) + (1-\gamma) G(x)$ y $\gamma F_2(x) + (1-\gamma) G(x)$ son también equivalentes.

Este axioma establece la condición que permite llegar a la propiedad lineal de la función de utilidad. Es decir, si F_1 y $F_2 \in P^*$ y $0 \leq \gamma \leq 1$. Se verifica

$$U\{\gamma F_1 + (1-\gamma) F_2\} = \gamma U(F_1) + (1-\gamma) U(F_2).$$

Si tenemos en cuenta las dos hipótesis básicas:

Hipótesis 1:

Si F_1, F_2 y $F \in P^*$ y $0 \leq \gamma \leq 1$ entonces $F_1 \leq F_2$ y solamente si:

$$\gamma F_1 + (1-\gamma)F \leq \gamma F_2 + (1-\gamma)F$$

Ello supone admitir que si F_1 como distribución de beneficios no es preferida a F_2 , entonces dada una tercera distribución de beneficios F se cumple:

$$\gamma(F_1 - F) + F \leq \gamma(F_2 - F) + F$$

La objeción que se podría oponer a esta hipótesis es que para $\gamma = 0$ podría darse la equivalencia en esta última relación aún cuando $F_2 < F_1$. También se podría objetar que dicha relación viene dada en términos de probabilidad y el sujeto puede tener aversión al azar. Tales objeciones no son de peso tratándose del empresario de seguros.

Hipótesis 2:

Si $F_1 < F_2 < F_3$ entonces existen unos números $0 < \gamma < 1$ y $0 < \mu < 1$ tales que:

$$\gamma F_3 + (1-\gamma)F_1 < F_2 < \mu F_3 + (1-\mu)F_1$$

Esta hipótesis parece difícilmente admisible, si por ejemplo F_1 correspondiera con la situación de riesgo en donde la ruina de la empresa es casi cierta. Pero teniendo en cuenta que $\mu \approx 1$ y dada la actitud del empresario de seguros hacía el riesgo, estimamos que puede muy bien ser admitida.

De esta forma, postulando el orden de preferencia y admitidas las dos hipótesis, tenemos definida una función de utilidad sobre P^* que resulta equivalente a dicho orden de preferencia.

Con lo cual ya podemos establecer lo siguiente:

Para una distribución de probabilidad arbitraria, podemos escribir:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-y) dF(y)$$

En donde, en general, se tiene:

$$U\{F(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} U\{E(x-y)\} dF(y)$$

Esta es la hipótesis Bernoulliana que da la utilidad de una distribución de probabilidad (ó una situación de riesgo) como una suma ponderada de las utilidades asociadas a las distribuciones degeneradas.

Es conveniente escribir:

$$U(y) = U\{E(x-y)\}$$

Siendo $U(y)$ la utilidad de la cantidad de dinero "y" pagable con probabilidad uno, es decir, $U(y)$ puede ser interpretada como la utilidad del dinero.

Se puede escribir:

$$U\{F(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dF(x)$$

Lo anteriormente expuesto nos permite establecer, dada la función de utilidad asociada al beneficio $U(y)$, el siguiente modelo de optimización que nos permite obtener la solución óptima.

$$\int_0^{\infty} U\left\{S + \sum_{r=1}^m n_r(\lambda_r) (1+\lambda_r) P_i - x\right\} dF^{(m)}(x) = \text{máx.}$$

con la condición:

$$\prod_{r=1}^m e^{-R(1+\lambda_r)t_r} \bar{c}_r \phi_n\{U(R)\}$$

siendo:

$$F^{(m)} = F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_m$$

III.5.- LOS RECARGOS COMERCIALES

Aquí es preciso distinguir los que tienen su origen en los gastos de gestión interna y que están en función de la organización de cada empresa, de aquellos otros que remuneran fundamentalmente la labor comercial.

Respecto a los recargos de gestión interna, podemos considerar que la mayoría de las empresas aseguradoras tienen organizados sus servicios administrativos con una estructura de tipo funcional, cuya característica principal es que se adapta a la vida

de la póliza dando lugar a las Secciones de Producción, Cartera y Siniestros. Además existen otras secciones básicas entre las que destacamos:

- Asesoría Jurídica.
- Contabilidad
- Inversiones
- Personal
- Reaseguros
- Planificación y Control
- Mecanización

En cuanto a los gastos de gestión externa, podemos distinguir las siguientes tres funciones de las cuales dependerá, en cada caso, el porcentaje de comisión correspondiente.

Producción:

La orientación, preparación y asesoramiento del proponente; la extensión, firma y tramitación de la proposición, y la mediación durante toda la vigencia del seguro, entre el Asegurado y la Entidad, para hacer llegar a cualquiera de ellos las comunicaciones e informaciones del otro.

Cobro:

El cobro de las primas, la formalización de la póliza, suplementos y cuantos documentos se puedan producir durante la vigencia del seguro.

Asistencia a los Asegurados y tramitación de siniestros,

comprendiendo el asesoramiento a los clientes durante toda la vida del seguro; la recepción de los partes de siniestro y toda la información y documentación de los mismos, y la realización de los pagos y cobros que se le encomienden.

En conclusión, vemos que la formación del precio del servicio de seguridad viene determinado no sólo por la información técnica (primas puras), sino también por la información interna de la empresa (gastos de administración, de producción y de cobro

y Cartera), así como la información económica proveniente del ambiente (mercado) en que aquella realiza su actividad, o de los agentes que operan en el mismo, especialmente en el caso de las comisiones.

Cuando se da entrada a la función de utilidad se puede plantear el problema en los siguientes términos: Según el número de operaciones demandadas dependa de los gastos (g), por ejemplo de propaganda, o de los recargos de seguridad (λ) se tiene la definición del beneficio:

$$Y_n = \begin{cases} h(g) (1+\lambda)P - X_n \\ h(\lambda) (1+\lambda)P - X_n \end{cases}$$

siendo:

P = Precio por unidad de operación.

X_n = Siniestralidad asociada a n operaciones

$F^{(m)}(x)$ = Distribución de probabilidad asociada a las operaciones.

La solución óptima viene dada por el valor de g ó de λ que hace máxima:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(S_0 + Y_n) dF^{(n)}(x) = \text{máx.}$$

También se puede dar entrada a la función de utilidad asociada, al grupo asegurado, como veremos a continuación.

Decisión y Experience Rating:

El subsistema de cálculo de primas debe ser tal que aseguren un beneficio técnico o ganancia por riesgo (Saxer) a la Entidad aseguradora. Es decir:

$$(1+\lambda)P - X = R + B$$

o bien, los ingresos técnicos (primas con recargos de seguridad) menos los siniestros deben ser iguales a las reservas de estabilización más el beneficio técnico.

Según Saxer (1) existen dos criterios para fijar el beneficio técnico.

(1) Saxer, W.: "Versicherungsmathematik".

1) Criterio natural:

$$B = K(1+\lambda)P - X = K P_1 - X$$

siendo $0 < K < 1$, el coeficiente de ganancia, que se calcula haciéndolo:

$$E(B) = \int_0^{K P_1} (K P_1 - x) dF(x) = \lambda P$$

lo que lleva consigo también:

$$E(X - K P_1) = \int_{K P_1}^{\infty} (x - K P_1) dF(x) = (1-K) P_1$$

2) Criterio prudente:

El anterior criterio supone fijar K de forma que la esperanza del daño extraordinario $L = X - K P_1$, sea igual a la media del mismo, es decir:

$$E(L) = (1-K) P_1$$

el criterio prudente, supone además, tener en cuenta la desviación típica de L es decir:

$$(1-K) P_1 = E(L) + \gamma \sigma(L)$$

En estrecha relación con el problema del beneficio técnico se encuentran los problemas de dividendos ó extornos. Cuando éstos se refieren a los asegurados, estamos en presencia de una segunda tarifificación, o sea de una modalidad de Experience Rating. Esta modalidad es de especial aplicación a los seguros colectivos que no tengan elementos de ahorro.

El problema de decisión consiste en encontrar una fórmula de dividendo o extorno (premium refund) que sea función de las primas, de los siniestros y que resulte consistente con la estabilidad de la Compañía. Partiendo de las notaciones:

$$\text{Prima Neta (pura)} = P = E(X)$$

$$\text{Prima recargada } P_r = P_r = (1+\lambda) P$$

$$\text{Prima comercial } P'' = P + F \quad F = P'' - P_r$$

Con respecto a F es preciso tener en cuenta que en los seguros de grupo se utilizan recargos comerciales más bajos, en especial los que se refieren a la gestión externa. Una vez tenido esto en cuenta la componente F se basa en la experiencia de la to-

talidad de la Cartera, es decir, los gastos observados para los grupos pertenecen a la Cartera total sin diferenciar la experiencia en cada grupo particular.

Entre las principales fórmulas de optimación de los dividendos o extornos destacamos las debidas a Jackson (1), Kahn (2) y Ammeter (3), como puede verse en los trabajos que se citan.

III.6.- POLITICA DE PRECIOS

El enfoque sistémico de la formación del precio se caracteriza porque tiene en cuenta los flujos de información que se originan tanto en los distintos subsistemas que integran la Empresa de Seguros considerada como sistema complejo, como los flujos de información provinientes del ambiente o entorno.

De acuerdo con los tres niveles de sistemas expuestos en la Parte de Introducción de este Trabajo de Tesis Doctoral (Estratégico, Táctico y Operativo), la variable precio es una variable de decisión correspondiente a los niveles táctico y estratégico y establecida en base a la información obtenida del sistema operativo y del entorno del decisor.

Según hemos podido analizar en los epígrafes anteriores de esta Tercera Parte, la formación del precio está condicionada por:

a/ La información que posea el decisor sobre el riesgo (primas puras), tanto en lo referente a la estructura de la tarifa (factores de riesgo, sistemas de tarificación, etc.), como a su nivel.

(1) Jackson, P.: Experience Rating. Transactions of the Society of Actuaries. 1953.

(2) Kahn, P.: The application of utility theory to group experience rating. XVIII Congreso Internacional de Actuarios. 1964

(3) Ammeter, H.: Risikotheoretische Grundlagen der Ertahemystarifizierung. 1965

b/ Información sobre el recargo de seguridad λ , el cual, cuando se opera en Bases de Segundo Orden es una variable de decisión.

c/ Información interna de la empresa, la cual condiciona los recargos de gestión interna g_1 y gestión externa g_2 que giran sobre las primas de seguro.

d/ Información sobre el beneficio repartible (política de dividendos) y la participación de los asegurados en el beneficio del asegurador (Premium refund).

e/ Información sobre el mercado (ambiente), el cual puede adoptar dos formas: mercado competitivo, en el que el precio se fija en función de la dimensión técnica de la empresa; ó mercado uniforme. (caso español), en el que priva la política de precios uniformes con recargos de seguridad implícitos.

INFLUENCIA DE LA DIMENSION TECNICA DE LA EMPRESA EN LA FORMACION DEL PRECIO:

Si medimos la producción del servicio de seguridad en número medio de siniestros P , podemos escribir la siguiente función de producción:

$$P = f(S, M, \lambda)$$

es decir, las Reservas de Estabilización, el Reaseguro, y el Recargo de Seguridad son los tres factores de producción del Servicio de Seguridad.

Situándonos a corto plazo, la magnitud S se presenta como dato, S_0 , (factor fijo de producción), con lo cual la función de producción será:

$$P = f_1(M, \lambda)$$

Cada combinación (M, λ) necesaria para conseguir el grado de estabilidad ϵ tiene un coste, es decir, $C(M, \lambda)$. La curva de costes variables más favorables para cada volumen de producción P , es decir, $C_v(p)$ se obtiene de:

$$C(M, \lambda) = \text{mínimo}$$

$$P = f_1(M, \lambda)$$

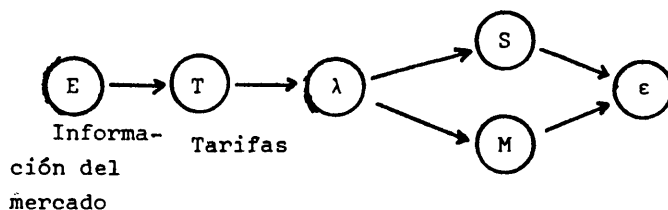
Los costes totales a corto plazo vienen dados por:

$$C_T = F_0 + C_v(P)$$

siendo F_0 los costes fijos (que incluyen los costes financieros de S_0). El volumen de producción P_0 para el cual se hacen mínimos estos costes nos da el óptimo de explotación. La dimensión de empresa viene dada por $(S_0; P_0)$. De aquí que las Reservas de Estabilización constituyan el elemento determinante de dicha dimensión técnica.

Al dar entrada a los demás sistemas, las decisiones sobre S se presentan con carácter autónomo; de aquí que constituya la más importante variable de decisión en la empresa de seguros.

De este contexto tiene especial importancia el funcionamiento del mercado. La información que procede del mismo puede llegar, incluso, a invertir la preordenación del grafo. Supongamos, por ejemplo, que estamos en un mercado de primas uniformes calculadas con Bases de Primer Orden, es decir, en donde el margen de seguridad aparece en forma implícita. En una empresa determinada se podría considerar el siguiente grafo:



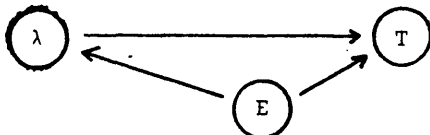
Es decir: En base de los márgenes implícitos existentes en las tarifas uniformes se puede conseguir el grado de estabilidad deseado. El proceso normal suele ser el siguiente: Tener pequeñas reservas S , que generalmente aparecen implícitamente en las Reservas de primas (Matemáticas o de Riesgos en curso) o en las cifras de capitales mínimos.

El reaseguro se ve favorecido por estos márgenes implícitos existentes en las primas y que permiten financiarlo más fácilmente. Por otra parte, la escasez de Reservas de estabilización resta poder negociador a la empresa que tiene que acceder a las exigencias del mercado del Reaseguro.

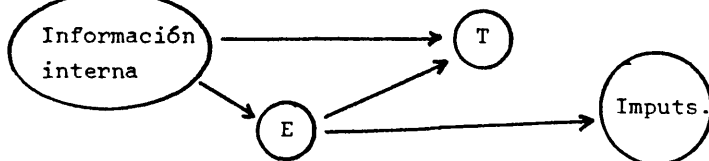
Sistemas más complejos:

De acuerdo a como vengan los flujos de información se puede dar un sistema más complejo. Por ejemplo:

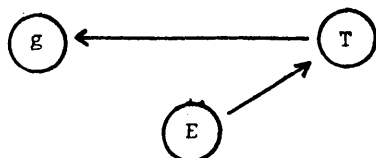
a/ La demanda de operaciones depende del recargo de seguridad, es decir, $n(\lambda)$. En este caso las decisiones sobre λ deben tener en cuenta el subsistema de información económica (E), o sea:



b/ La demanda de operaciones depende de los gastos g , es decir, $n(g)$ (por ejemplo, gastos de propaganda). En este caso las decisiones sobre g influyen en la tarifa y en el número de operaciones a través de E, o sea:



c/ También se puede dar el camino inverso en el caso de tarifas que por estar elaboradas con Bases de Primer Orden los márgenes implícitos financien gastos de gestión interna o externa (g). Es decir:



Estos son sólo algunos de los sistemas que se pueden formular en base a como se encuentren definidos los flujos de información. Evidentemente, la puerta queda abierta a múltiples combinaciones que nos conduzcan a un mejor conocimiento del tema que se ha analizado.

1000

IV

CONCLUSIONES

IV.- CONCLUSIONES

El presente Trabajo de Tesis Doctoral versa sobre el Coste y Precio del Riesgo, analizados desde una perspectiva de Enfoque Sistémico, es decir, dentro de la metodología establecida por la Teoría General de Sistemas. Ello hace que, en dicho Trabajo, estén presentes dos elementos a considerar: el objeto del mismo y la forma de tratar dicho objeto. Es así que, siendo el objeto el análisis del Coste y Precio del Riesgo, su forma de tratamiento puede seguir dos métodos fundamentales: lo que, en el presente trabajo, llamamos Concepción Clásica, y la Concepción Sistema. La primera se limita a analizar y tratar el objeto sin relacionarlo con su entorno circundante, es decir, sin hacer apelación al hecho de que el servicio de Seguridad, que está en la mente de quien mide el Riesgo en términos de "Precio", es ofrecido por una Empresa (tenga ésta la forma social, jurídicamente hablando, que tenga, es decir, en el caso español, Sociedad Anónima o Mutualidad), Empresa que tiene una estructura económica y que trabaja en un entorno socio-económico, circunstancias ambientales éstas que, sin influir, por lo menos a nivel técnico, en el Coste del Riesgo, sí que lo harán en el Precio de dicho servicio de Seguridad. La Concepción Sistema, por contra, situará el objeto de nuestro trabajo en el contexto de la Empresa concebida como un sistema complejo, de tal forma que considerará las circunstancias ambientales del precio, a las que antes se ha hecho mención.

Esta dicotomía entre las Concepciones, Clásica y Sistémica, hará que nuestro trabajo discurra por esas dos vertientes y, como consecuencia de ello, que podamos sistematizar nuestras Conclusiones en los siguientes puntos:

1º/ El planteamiento del problema del Coste y Precio del Riesgo en la Concepción Clásica se hace en términos meramente estadísticos. Para ello se define la variante asociada al Proceso de Riesgo y se analiza su distribución, cuyos valores nos dan la siniestralidad total producida por cada póliza. Establecido el correspondiente principio de cálculo de primas (normalmente el

principio del valor esperado, que define a la prima de riesgo como el valor probable de la variante expresiva del daño o siniestralidad total), el conocimiento de los parámetros fundamentales del Proceso de Riesgo nos permite determinar la Prima de Riesgo, a la que posteriormente se incorporarán las componentes administrativas, comerciales, impositivas, etc. Pero lo básico, y lo que queremos resltar en este punto de nuestra disertación, es que la Concepción Clásica del problema analiza la "medida" del Riesgo mediante su "Precio" en términos meramente estadísticos. Esta Concepción resulta, evidentemente, superada por la Concepción Sistema, en donde la necesidad de integrar ambientes, interrelacionar subsistemas y elementos, jerarquizar objetivos y considerar entornos de incertidumbre permite que las decisiones quese elaboren en torno al problema del Coste y Precio del Riesgo tengan una operatividad ajustada a los problemas que comporta la propia realidad, es decir, que se elaboren tarifas aplicables al mercado en que se va a competir.

Cuando, en la parte introductoria del presente Trabajo, se establecían las notas más destacadas y características de la Concepción Clásica, se citaban las siguientes:

- a/ En la Concepción Clásica, los problemas se estudiaban por ambientes, de tal forma que se presentaban aislados e independientes.
- b/ Como consecuencia de la falta de interrelación entre los distintos elementos de un problema, el todo es concebido como suma de sus partes, es decir, no se plantea un análisis de óptimo global, sino que tal óptimo se concibe como intersección lógica, o suma si se prefiere, de los óptimos parciales.
- c/ Los objetivos aparecen aislados y considerados como únicos.
- d/ Por último, en la Concepción Clásica, el entorno es considerado como estable, como un entorno de certidumbre, en definitiva, como un dato del problema.

Por contra la Concepción Sistema o Enfoque Sistémico viene caracterizado por lós siguientes puntos fundamentales:

a/ Se procede en la misma a una integración de ambientes. Por ello se dice que la Concepción Sistema es una Concepción Transdisciplinar o Interdisciplinar.

b/ El Sistema Total aparece integrado por una serie de Subsistemas y Elementos interrelacionados entre sí. En este sentido, el todo ya no coincide con la suma de las partes, poseyendo el todo propiedades que no están en las partes que lo integran.

c/ En tercer lugar, los objetivos ya no son únicos, sino múltiples, y aparecen jerarquizados.

d/ En la Concepción Sistema, el entorno es de incertidumbre, incertidumbre que ha de ser neutralizada con información, por lo que pasan a un primer plano de importancia los flujos de información. Este tema de los flujos de información será de una gran trascendencia en la formación del precio del Seguro y de la política de precios, como se comentará posteriormente.

Para resaltar la idea básica de lo que supone la Concepción Sistema en el análisis de la formación del precio del Seguro, quizá el elemento más expresivo sea la definición que el Profesor Ubaldo Nieto de Alba establece de lo que es la Teoría Matemática del Seguro. La define como "la Ciencia que tiene por objeto el estudio cuantitativo de las operaciones de Seguro, en cuanto que tales operaciones se llevan a cabo por un Ente que desarrolla su actividad dentro de un marco socio-económico". En este sentido, podríamos decir, concretando la anterior definición al ámbito de la tarificación, que la Concepción Sistema concibe el problema de la formación del precio del Seguro como un problema que ha de considerar dos elementos de gran importancia: quién ofrece el servicio cuyo precio se pretende cuantificar (la Empresa Aseguradora) y dónde se ofrece dicho servicio (Mercado), que es el entorno de la Empresa). En esta perspectiva, la Concepción Sistema, cuya metodología se sigue en esta Tesis Doctoral, permite, en definitiva, elaborar precios que se ajusten a la realidad social del mercado y a la estructura de la empresa (dimensión de la misma, etc.), con lo que se concebirá el problema no sólo en su vertiente técnica.

nico-estadística, como hace la Concepción Clásica sino Económica, tema éste al que la Ciencia Actuarial Clásica no ha dedicado la atención que merece.

2º/ El estudio estadístico del riesgo goza de un gran número de limitaciones, como se ha puesto de relieve en el punto anterior, pero, a su vez, de un profundo rigor en sus planteamientos, que permite abordar el problema de su sistemática, a la cual ha correspondido la Parte Segunda de la presente Tesis Doctoral.

En efecto, una cosa es que, desde un Enfoque Sistémico, el planteamiento estadístico del riesgo se configure como un Subsistema dentro del Sistema Total, al que hemos denominado Subsistema de Información Técnica, y, en cuanto que Subsistema, insuficiente en el planteamiento del problema, y otra que, desde esa misma Concepción Sistema, no se reconozca el carácter de necesario a dicho Subsistema, eslabón necesario para llegar al Subsistema de Tarifas, que es el que pretendemos establecer. Por tanto, diríamos que más que una dicotomía excluyente entre la Concepción Clásica y la Concepción Sistema, lo que se produce es una incorporación de la primera a la segunda por inclusión en la misma como Subsistema. Desde el Enfoque Sistémico, es por tanto no sólo posible, sino incluso imprescindible, establecer un análisis estadístico del riesgo. Y en ese análisis de lo que, en la Parte II de este Trabajo se ha llamado "El Coste Estadístico" (del Riesgo), el elemento fundamental que se ha definido es el Proceso de Riesgo.

El Proceso de Riesgo es definido como un proceso estocástico aditivo de variantes asociadas, tal y como la conceptúa el Profesor Angel Vegas Pérez en su reciente obra "Estadística. Aplicaciones Econométricas y Actuariales" (Pag. 229). En dicho proceso hay dos variantes fundamentales: Número de siniestros ocurridos y Cuánta de cada siniestro. Las distribuciones de dichas variantes configuran las llamadas "Distribuciones básicas del proceso de riesgo". En realidad, el objetivo, como se ha indicado, es el de definir la distribución del proceso de riesgo, es decir, la llamada "distribución del daño total". Dicha distribución viene caracterizada por la función de distribución:

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) G(x/n)$$

donde $P_n(t)$ es la función de cuantía de la distribución del número de siniestros, es decir, la probabilidad de que, en el tiempo operacional t (número de siniestros esperados) se produzcan n siniestros, y $G(x/n)$ expresa la probabilidad de que, producidos n siniestros, la cuantía total de las indemnizaciones que los mismos comportan, no supere el valor x .

Ocorre, sin embargo, que, establecida la hipótesis de independencia, en el sentido de que la cuantía de cada siniestro es independiente del número de siniestros producidos, la distribución del daño total pasa a tener por función de distribución:

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V^{n*}(x)$$

siendo $V^{n*}(x)$ la convolución n -ésima de $V(x)$, función de distribución de la cuantía de un siniestro. De esta forma, las dos distribuciones básicas a analizar son $P_n(t)$ y $V(x)$.

Al análisis de $P_n(t)$ se ha dedicado el apartado II.2.1. de este Trabajo y al de $V(x)$ el II.2.2. En dichos análisis se obtienen conclusiones de interés sobre las distribuciones que frecuentemente mejor se ajustan a la realidad. Así, respecto a la distribución del número de siniestros, las dos distribuciones básicas son la de Poisson y la Binomial Negativa. Ambas son analizadas directamente, en primer lugar, como límites, cuando el número de expuestos al riesgo se hace infinito, de la distribución binomial y de la de Polya, respectivamente, para, en segundo lugar, ser introducidas por medio de procesos estocásticos. Conclusiones interesantes sobre las mismas son las que se deducen del hecho de la ausencia de contagio (en el caso de la distribución de Poisson) o de la existencia de contagio, de carácter positivo, (en el caso de la distribución binomial negativa). Así mismo, son interesantes las conclusiones obtenidas de la definición de dichas distribuciones como distribuciones compuestas: la distribución de Pois-

son, como distribución binomial compuesta, y la distribución binomial negativa, como distribución de Poisson compuesta.

El análisis de $V(x)$ nos conduce al de distintas distribuciones continuas, entre las que destacan la distribución gamma, la distribución logarítmico-normal y la distribución de Pareto. Al margen de las conclusiones clásicas obtenidas del análisis de las mismas, es interesante el apartado de ajuste gráfico dedicado a ellas, pues el problema fundamental con respecto a las mismas, es, por supuesto, el de su aplicación. Un tema al que se ha dedicado una especial atención en este trabajo es el de la caracterización de estas distribuciones, tema que está dando lugar a múltiples publicaciones en estos últimos años. Ello se debe a que se ha considerado, desde el punto de vista de la aplicabilidad de las distribuciones, al que acabamos de referirnos, que un elemento que ayuda de manera importante a conocer el verdadero carácter de las poblaciones es precisamente el del comportamiento de muestras y estadísticos ordenados. De los teoremas de caracterización que se han recogido en este Trabajo se obtienen, por tanto, interesantes conclusiones de carácter estadístico.

Por último, en todas las distribuciones básicas subyace latente el problema de la homogeneidad y heterogeneidad de riesgos. Su análisis se efectúa a través del coeficiente de heterogeneidad h , que aparece como parámetro significativo en la distribución de Polya y binomial negativa. La técnica del análisis del factor desempeña un papel de importancia en este tema de la heterogeneidad de riesgos, como se comentará en el punto siguiente.

El conocimiento de las distribuciones básicas y de la distribución del daño total permiten evaluar el llamado "Coste estadístico del Riesgo".

3º/ Al plantearnos el problema de la tarificación estadística, dentro de la Concepción Clásica, y como paso previo al Enfoque Sistémico, se ha puesto de manifiesto que el Análisis del Factor es una técnica de trascendental importancia, así como se ha resaltado la importancia de los principios que informan los diremos ti-

pos de tarificaciones, y cómo, en concreto, los principios directores de la tarificación a posteriori han surgido antes incluso de aparecer la concepción bayesiana de la estadística. Ahora bien, los criterios estadísticos son insuficientes, si no van acompañados de las otras componentes de información (interna y externa de la empresa), para la elaboración del precio del seguro en un mercado competitivo.

Al analizar el proceso de tarificación como proceso encaminado a la determinación de primas equitativas, que han de proporcionar una adecuada estabilidad a la empresa aseguradora, se ha establecido que tal proceso corresponde a una modelización definida por el "principio de de equivalencia" $P = \Psi \{F(x,t)\}$, que, define Ψ , permite asignar una prima P a cada distribución del daño total $F(x,t)$. El "principio de equivalencia" más utilizado será el del valor esperado, definido por: $P = \int x d F(x,t)$. En el supuesto de que las cuantías de los siniestros resulten ser independientes del número de ellos, dado que $F(x,t) = \sum P_n(t) V_n^*(x)$, se verifica que: $P = \int x d F(x,t) = t \alpha_1$, donde t expresa el número probable de siniestros y α_1 el coste probable de cada siniestro. El conocimiento de ambos parámetros permitirá determinar la prima pura (norecargada).

Se ha dedicado especial atención al estudio de los casos de participación del asegurado en la cobertura del riesgo, tales como los seguros con franquicia (absoluta y relativa), seguro a primer riesgo, etc., y, dada la importancia que presenta la distribución logarítmico-normal como distribución de la cuantía de los siniestros, importancia puesta de manifiesto en los más recientes trabajos sobre esa materia, se ha procedido al cálculo del coste medio por siniestro para esos seguros de participación en el caso en que $V(x)$ sea lognormal, lo que permite obtener interesantes conclusiones, toda vez que las expresiones finales aparecen referidas a la función de distribución de la distribución $N(0,1)$, función que, como es bien sabido, está tabulada.

Se puede hablar de dos tipos fundamentales de sistemas de tarificación: la tarificación a priori o "class rating" y la tarificación a posteriori o "experience rating". En la primera, para proceder a la agrupación de riesgos por clases homogéneas, que permita establecer tarifas uniformes dentro de cada clase, es fundamental la técnica del Análisis del Factor, que se ha analizado en el epígrafe III.2., en los dos modelos fundamentales del mismo: uno, basado en el análisis de la regresión y el otro, el tradicional modelo del análisis de la varianza.

En la tarificación a posteriori se ha hablado con cierta detención de los sistemas de bonificación, sistema Bonus-Malus, etc. En concreto, referido al sistema de Bonus-Malus, se ha analizado el problema del establecimiento de escalas de bonus, lo que permite observar interesantes conclusiones prácticas, y, lo que es interesante, se ha relacionado el sistema Bonus-Malus con la teoría de la Credibilidad, a través de la expresión de la media a posteriori característica del sistema en función de la conocida fórmula de la Credibilidad,

$$E(t\lambda/n) = (1-Z) m + Z \bar{X},$$

donde m expresa la media a priori de la clase correspondiente, \bar{X} la media muestral de siniestralidad en la clase y Z es el factor de credibilidad. Las conclusiones deducibles del sistema de tarificación analizado se ponen en evidencia en un ejemplo numérico.

Son de interés las conclusiones que se obtienen del análisis y discusión sobre la conveniencia de los sistemas de bonificación por ausencia de siniestros en el seguro del automóvil.

El análisis de la tarificación a posteriori se completa con el estudio de los demás sistemas, entre los que cabe destacar la tarificación retrospectiva, tarificación según programa, etc.

4º/ En la formación del precio del seguro, no solamente se ha puesto de manifiesto la importancia del criterio de eficacia estadística, sino también el hecho de que precio y estabilidad

aparecen relacionados a través del recargo de seguridad. Clásicamente, estos problemas se analizaban de forma independiente. Aunque el objeto de la presente Tesis no es el estudio de la teoría de la estabilidad, se ha puesto de manifiesto la interrelación entre precios, solvencia y reaseguro.

En primer lugar, se ha hecho un somero repaso de las Teorías del Riesgo, que permite evidenciar las relaciones entre las distintas magnitudes de estabilización, y, en concreto, el tema del recargo de seguridad, ha sido tratado en el epígrafe III.4. de este Trabajo. En el grafo de la página 53 se relaciona estas magnitudes a través de su inclusión en los sistemas de estabilidad (el recargo de seguridad, λ) y sistemas de tarifas. Es evidente que el tema del recargo de seguridad, como componente del precio del Seguro que es, debía ser objeto de nuestra atención, aunque no de nuestro preferente estudio.

5º/ La política de precios que, con enfoque sistémico, se ha planteado, tiene en cuenta los flujos de información que se originan tanto en los distintos subsistemas que integran la Empresa de Seguros considerada como un sistema complejo, como los flujos de información provenientes del ambiente o entorno. De acuerdo con los tres niveles (Estratégico, Técnico y Operativo) de sistemas establecidos en la Parte Introductoria de este Trabajo, la variable precio es una variable de decisión, correspondiente a los niveles táctico y estratégico, y establecida en base a la información obtenida del sistema operativo y del entorno del decisor.

Se ha analizado, así mismo, la influencia de la dimensión técnica de la Empresa en la formación del precio. Los elementos fundamentales de dicho proceso de formación del precio resultan ser, precisamente, la propia dimensión de la empresa y los flujos de información interna y externa. Conforme tales flujos sean de una u otra forma, tengan uno u otro sentido, la política de precios queda fuertemente condicionada. Al análisis de algunos tipos concretos de flujos de información se han dedicado las últimas páginas del presente Trabajo, sin que la tarea no haya hecho más que comenzar.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Símbolos fundamentales:

- ASTIN = The Astin Bulletin.
 - S.A.J. = Scandinavian Actuarial Journal = Skandinavisk Aktuarietidskrift (hasta 1974).
 - C.I.A. = Congreso Internacional de Actuarios.
 - P.C.A.S. = Proceedings of the Casualty Actuarial Society.
 - B.I.A.F. = Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaries Français.
 - A.I.A.E. = Anales del Instituto de Actuarios Españoles.
-
- D'Addario, R.: Intorno alla curva dei redditi di Amoroso. Italiana Statisti. Econ. Finanza. 1932. Anno 4. Nº 1.
 - Aitchison, J.- Brown, J.A.C.: The Lognormal Distribution. Cambridge University Press, 1957.
 - Ajne, B.: On the Statitistical Estimation of Cots of Claims. ASTIN. Vol. VII, Part. 2. Marzo, 1974. Pag. 181-191
 - - A Note on the Multiplicative Ratemaking. ASTIN. Vol. VIII, Part. 2. Septiembre, 1975. Pag. 144-153
 - Alcalde Inchausti, Angel: Distribuciones probabilísticas de la renta personal. Estadística Española, nº 19. Abril-Junio, 1963. Pag. 5-11.
 - Almer, Bertil: Risk Analysis in theory and Practical statistics. XV. C.I.A. New York, 1957. Tomo II, Subject. III. Pag. 314-370
 - Some Problems in motor accident insurances. XVI. C.I.A. Bruselas, 1960.
 - Pareto class of Claims distributions. S.A.J. 1961. nº 1-2. Pag. 65.
 - Researches in General Risk Theory. S.A.J. 1961. Part. 3-4. Pag. 171-202.

- Almer, Bertil: Individual Risk Theory and Risk Statistics as Applied to Fire Insurance. ASTIN. Vol. II, Part. III. Abril, 1963. Pag. 365-379.
- Modern General Risk Theory. ASTIN. Vol. IV, Part. II. Febrero, 1967. Pag. 136-169.
- Ammeter, Hans: Anveudungen der Kollektiven Risikotheory auf Probleme der Sachaversicherung. XV. C.I.A. New York, 1967.
- Ammeter- Depoid- De Finetti: L'Etude Mathématique des Assurances non Viageres dans l'Europe. ASTIN. Vol. I, Part. II. Diciembre, 1959. Pag. 46-70.
- Ammeter, Hans: Note Concerning the Distribution Function of the Total Loss Excluding the Largest Individual Claim. ASTIN. Vol. III, Part. II. Agosto, 1964. Pag. 132-143
- Risikotheortische Grundlagen der Ertahemystan-
fierung. 1965.
- Amoroso, L.: Richerche intorno all curva dei Redditi. Ann. Math. Pur. Applied. Ser. 4, 21. 1925. Pag. 123-159.
- Anantapadmanabhan, C.S.: Some statistical aspects of catastrophic risks. ASTIN. Vol. V, Part. 3. Febrero, 1971. Pag. 307-313.
- Andreadakis, M.- Waters, H.R.: The Effect of Reinsurance on the Degree of Risk Associated with an Insurer's Portfolio. ASTIN. Vol. 11, Part. 2. Diciembre, 1980. Pag. 119-135.
- Andersson, Hans: The Influence of Climate on Fire Damoge. ASTIN. Vol. II, Part. III. Abril, 1963. Pag. 345-351.
- An Analysis of the Development of the Fire Los-
ses in the Nor thern Countries after the Second
World War. ASTIN. Vol. VI, Part. 1. Septiembre,
1971. Pag. 25-30.

- Andreasson, Gunnar: Distribution Free approximations in applied Risk Theory. ASTIN. Vol. IV, Part. I. Enero, 1966. Pag. 11-18
- Anscombe, F.J.: Sampling theory of the Negative Binomial and Logarithmic Series distributions. Biometrika n° 37. 1950. Pag. 358-382.
- Arbous, A.G.- Kerrich, J.E.: Accidents statistics and the Concept of accident-proneness. Part. I: A critical evaluation. Part. II: The Mathematical background Biometrics. n° 7. 1951. Pag. 340-429.
- Asbhy, N.R.: Introducción de la Cibernética.
- L'Association Generale des Sociétés d'Assurances contre les Accidents: Exploitation du Sondage Automobile 1971 en France par une Méthode d'Analyse Multidimensionnelle. ASTIN. Vol. IX, Part. 1 and 2, Enero, 1977. Pag. 10-25.
- Baikunth Nath, G.: Unbiased Estimates of Reliability for the Truncated Gamma Distribution. S.A.J. 1975. Pag. 181-186.
- Bailey, Arthur: Sampling theory in casualty insurance. P.C.A.S. n° 29. (1942) y n° 30. (1943).
 - A Generalized of theory of Credibility. P.C.A.S. n° 32. 1945. Pag. 13-20.
 - Credibility procedures. Laplace's generalization of Bayes's rule, and the combination of collateral knowledge with observed data. P.C.A.S. n° 37. 1950. Pag. 7-23. Discusión, pag. 94-115.
- Bailey, Robert- Le Roy Simon, John: An actuarial note on the Credibility of experience of a Single private passenger car. P.C.A.S. n° 46. 1959.
 - Some considerations on automobile rating systems utilizing individual driving records. P.C.A.S. n° 47. 1960.
 - Two Studies in Automobile Insurance Ratemaking. ASTIN Vol. I, Part. IV. Diciembre, 1960. Pag. 192-217.

- Banasinski, Anthony: Insurance as a cybernetic institution of self-regulation of the national economy. ASTIN. Vol. V, Part. 3. Febrero, 1971. Pag. 393-401.
- Bancket, L.B.: The Lognormal Model for the distribution of one claim. ASTIN. Vol. II, Part. 1. Enero, 1962. Pag. 9-23.
- Basu, A.P.: Estimates of Reliability for Some Distributions Useful in Life Testing. Technometrics. n° 6. 1964. Pag. 215-219.
- Beard, Robert E.: Some Notes on the Statistical Theory of Extreme Values. ASTIN. Vol. III, Part. 5. Diciembre, 1963. Pag. 6-12.
 - Some observations on no-claim bonus schemes in motor insurance. C.I.A. XVIII. Munich, 1968. Tomo IV. Pag. 345-357.
 - Verification of Outstanding Claim Provisions-Separatin Technique. ASTIN. Vol. IX, Part. 1. and 2. Enero, 1977. Pag. 26-32.
- Beard, R.E.- Pentikäinen, T.- Pesonen, E.: Risk Theory the Stochastic Basis of Insurance. Ed. Chapman and Hall. Second Edition. 1977.
- Benckert, Lars.- Gunnar- Jung, Jan: Statistical Models of Claim Distribution in Fire Insurance. ASTIN. Vol. VIII, Part. I. Septiembre, 1974. Pag. 1-25.
- Benckert, Lars- Sternberg, Ingrid: An Attempt to Find an Expression for the Distribution of Fire Damage Amount. XV. C.I.A. New York, 1957. Vol. 2. Pag. 288-296.
- Benktander, Gummur: Notes sur la distribution conditionnée du montant d'un sinistre par rapport a l'hypothese qu'il y a en un sinistre dans l'assurance automobile. ASTIN. Vol. II. Enero, 1962.

- Benktander, Gummer: A Note on the Most "Dangerous" and Skewest Class of Distributions. ASTIN. Vol. II, Part. III. April, 1963. Pag. 387-390.
 - Claims Frequency and Risk Premium Rate as a Function of the Size of the Risk. ASTIN. Vol. VII, Part. 2. Septiembre, 1973. Pag. 119-136.
- Benktander, Gummer-Segerdahl, Carl-Otto: On the Analytical Representation of claim Distributions with Special Reference to Excess of Loss Reinsurance. Comptes Rendus du XVI. C.I.A. Vol. I. Pag. 626-648. Pag. 630.
- Berg, Peter Ter: On the Loglinear Poisson and Gamma Model. ASTIN Volüm. 11, Part. 1. Junio, 1980. Pag. 35-40.
 - Two Programatic Approaches to Loglinear Claim Cost Analysis. ASTIN. Vol. 11, Part. 2. Diciembre, 1980. Pag. 77-90.
- Berger, Gottfried: Integration of the Normal Approximation. ASTIN Vol. VII, Part. 1. Diciembre, 1962. Pag. 90-95.
- Berliner- Baruch: A Risk Measure Alternative to the Variance. ASTIN. Vol. IX, Part. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 42-58.
 - Deriving the Pareto and Exponential Distribution Function from Classified Observation Data: A New Approach. XXI. C.I.A. Zurich-Lausanne, 1980. Tomo 2. Vol. 2. Pag. 31-42.
- Bertalanffy, Ludvig von: The Theory of Open Systems in Physics and Biology Science. 1950.
 - General System theory. A New Approach to Unity of Science. Human Biology. 1951.
 - Problems of Life. 1952.
 - General Systems Theory: a critical review. 1962.

- Bichse, Frits: Une méthode pour calculer une ristourne adéquate pur années sans sinistres. ASTIN. Vol. I, Part. III. Abril, 1960. Pag. 106-112.
- Experience Rating in Subsets of risk. ASTIN. Vol. V, Part. I. Mayo, 1968. Pag. 7-14.
- Bliss, C.I.: Fitting the Negative Binomial distribution to biological data. Biometrics. n° 9. Pag. 176-200.
- Bohman, Herald: To Compute the Distribution Function when the Characteristic Function is know. Skand. Aktuar. 1963. Hålf 1-2. Pag. 41-46.
- What is the reason that Exxcer's method of approximations is as good as it is ?. Skand Aktuar. 1963. Hålf 1-2. Pag. 87-94.
- Bohman, Herald- Esscher, Frederik: Studies in RIsK Theory with Numerical Illustrations Concerning Distribution Functions and Stop Loss Premiums. Part. I: Skand Aktuar. 1963. Hålf 3-4. Pag. 173-222. Part. II: (Tablas) Skand Aktuar, 1964. Half 1-2. Pag.1-40.
- Bohman, Herald: Experience Rating when the company aims to increase the volume of its busines. ASTIN. Vol. IV, Part. III. Julio, 1967. Pag. 208-209.
- Insurance busines describes by a Mathematical Model. Skand. Akatuar. 1973.
- Fourier Inversion - Distribution Functions - Long Tails. S.A.J. 1974. n° 1. Pag. 43-45.
- Numèrical Inversion of Charecteristic Functions. S.A.J. 1975. n° 2. Pag. 121-124.
- Bondesson, Lennart: On Infinite Divisibility of Powers of a Gamma Variable. S.A.J. 1978. n° 1. Pag. 48-61.
- On Generalized Gamma and Generalized Negative Binomial Convolutions. S.A.J. 1979. n° 2-3 Pag. 125-166.
- Borch, Carl: Reciprocal Reinsurance Treatiès seen as a two-person co-operative Gamme. Skand. Aktuar. 1960. n° 1-2.

- Broch, Karl: The Utility Concept Applied to the Theory of Insurance. ASTIN. Vol. I, Part. V. Julio, 1961. Pag. 245-256.
- La Teoría Económica y el Seguro. A.I.A.E. nº 4. 1964. Pag. 99-126.
- Una generalización de la teoría del riesgo colectivo. A.I.A.E. nº 5. 1965. Pag. 13-30.
- La Dirección de las Compañías de Seguros. Un estudio dentro de la Teoría Económica. A.I.A.E. nº 6. 1966. Pag. 217-234.
- Utility Theory. Trnas. Soc. Actuaries. 1969.
- Dynamic decision problems in an insurance company. ASTIN. Vol. V, Part. I. Mayo, 1968. Pag. 118-131.
- The Optimal Portfolio of asset in an insurance company. XVIII. C.I.A. Munich, 1968. Vol. III. Pag. 21-32.
- Mathematical Models in Insurance. ASTIN. Vol. VII. Part. 3. Marzo, 1974. Pag. 192-202.
- Boulding, Kenneth: General Systems Theory: The Skeleton of Science. Managemetn Science. Abril, 1956.
- Boyd, A.V.: Gurland's Inequality for the Gamma Function. Skand. Aktuar. 1960. Pag. 134-135.
- Braakman, T.C.: Experience rating and Credibility. ASTIN. Vol. V, Part. I. Mayo, 1968. Pag. 7-14.
- Brichler, M.: Etude sur la sruvevance des siniestres en Assurance Automobile. ASTIN. Vol. VI, Part. 2. Diciembre, 1971. Pag. 86-96.
- Brown, A.: Cumulants of Convolution- Mixed Distributions. ASTIN Vol. IX, Part. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 59-63.
- Bruton, J.- Cumpston, J.R.: Compulsory Third Party Insurance: Methods of Marking Explicit Allowance for Inflation. ASTIN. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 64-74.

- Bühlmann, Hans: A Distribution Free Method for General Risk Problems. ASTIN. Vol. III, Part. II. Agosto, 1964. Pag. 144-152.
- Experience Rating and Credibility. ASTIN. Colloquium 1965. Lucerne. ASTIN. Vol. IV, Part. III. Julio, 1967. Pag. 199-207. Vol. V, Part. II. Mayo, 1969. Pag. 157-168.
- Mathematical Methods in Risk Theory Springer-verlag. 1970. Pag. 85.
- A Comparison of three Credibility Formulae Using Multidimensional Techniques. ASTIN. Vol. VII, Part. 3. Marzo, 1974. Pag. 203-207.
- Review of J.A. Breckman's "Two Stochastic Processes" ASTIN. Vol. VIII, Part. I. Septiembre, 1974. Pag. 131-132.
- Minimax Credibility. S.A.J. 1976. n° 2. Pag. 65-78.
- An Economic Premium Principle. ASTIN. Vol. 11, Part. 1. Junio, 1980. Pag. 52060.
- Bühlmann, Hans- Buzzi, R.: On a Transformation of the Weighted Compound Poisson Process. ASTIN. Vol. VI, Part. 1 Septiembre, 1971. Pag. 42-46.
- Carlson, P.G.: Test of Hypotheses on the Exponential Lower Limits. S.A.J. 1958. Pag. 47-54.
- Carlson, Thomas O.: Negative Binomial ratiolate. P.C.A.S. n° 49 1962. Pag. 173-183.
- Observations on Casualty Insurance Rating Theory in the United States. 17 th. C.I.A. Londres- Edinburgo, 1964. Vol. III. Pag. 541-559.
- Castelo Matran, Julio- Pérez Escacho, Jose Luis: Diccionario Básico de Seguros. Ed. Mapfre, 1972.

- Chakravaety, P.P.: On Certain Inequalities connected with Gamma Function. Skand. Aktuar. 1969. n°1-2. Pag.20-23
- Chapman, D.G.: Estimating the Parameters of a Truncated Gamma Distribution. Ann. Math. Statist. n° 27. 1956. Pag. 498-506.
- Chiaro, A. del: Sui momenti delle leggi di distribuzione del Pólya a più variabili. Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari. Anno VII, n° 2. Abril, 1936.- XIV.
- Clarke, T.G.- Harland, N.: A Practical Statistical Method of Estimating Claims Liability and Claims cash Flow. ASTIN. Vol. VIII, Part. 1. Septiembre, 1974. Pag. 26-37.
- Cohen, A.C.: Estimating Parameters of Type III. Populations from Truncated Samples. J. Amer. Statist. Assoc. n° 45. 1950. Pag. 411-423.
- Cohen, A.- Clifford, J.R.: Maximum Likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored Samples Technometrics. n° 7. 1965. Pag. 529-588.
- Cramér, Harald: Collective Risk Theory. A survey of the theory from the Point of View of the theory of stochastic Processes. The Jubilee Volume of Forsakringssaktiebölaget. Skandic. 1955. Pag. 43.
- Métodos matemáticos de Estadística. Aguilar. 4. Ed. 1968. Pag. 287.
- Cummins, J.D.- Powell, A.: The Performance of Alternative Models for Forecasting Automobile Insurance Paid Claim Costs. ASTIN. Vol. 11, Part. 2. Diciembre, 1980 Pag. 91-106.
- Daboni, Luciano: Some Models of Inference in the Risk Theory from a Bayesian Viewpoint. ASTIN. Vol. VIII, Part. 1 Septiembre, 1974. Pag. 38-56.

- David, A.: La Cibernética y lo humano.
- Delaporte, Pierre J.: Sur l'efficacité des critères de tarification de l'assurance contre les accidents d'automobiles. B.I.A.F. n° 238. 1962. Pag. 41-51.
 - Un problème de tarification de l'assurance accidents d'automobiles examiné par la statistique mathématique. XVI C.I.A. Bruselas, 1960. Vol. II. Pag. 121-135.
 - Principes de tarification de l'assurance automobile par la prime modelée sur le risque. XVII C.I.A. London-Edinburgo, 1964. Vol. III. Pag. 560-571.
 - Tarification du risque individuel d'accidents d'automobile par la prime modelée sur le risque. ASTIN. Vol. III, Part. III. Abril, 1965. Pag. 251-271.
 - Las Matemáticas de l'Assurance Automobile ASTIN. Vol. VI, Part. 3. Mayo, 1972. Pag. 185-190.
- Depoid, P.: Applications de la Statistique aux Assurances.
- Depoid, P.- Duchez, E.: Recherches sur les gros sinistres en R.C. Automobile. France 1948-1955. ASTIN. Vol. II, Part. III. Abril, 1963. Pag. 391-414.
- Derron, Marcel: A Theoretical Study of the No-Claim Bonus Problem ASTIN. Vol. III, Part. I. Diciembre, 1963. Pag. 62-74.
 - A Study in credibility betterment through exclusion of the Largest claim. ASTIN Vol. IV, Part. I. Enero, 1966. Pag. 39-48.
 - Actuarial Studies on motor insurance in Europe and North America. 18 C.I.A. Munich, 1968.

- Des Raj: Estimation of the Parameters of Type III populations from truncated Samples J. Amer Statist. Assoc. n° 48. Pag. 336-349.
- Dorwelier, Paul: A Survey of Risk Credibility in Experience Rating P.C.A.S. Vol. 21, Part. 1. 1934. Pag. 1-25.
- Down, F.: Linear estimates of parameter in the extreme-value distribution. Technometrics n° 8. 1966. Pag. 3-17.
- Dropkin, Lester B.: Some Considerations on Auto Rating Systems utilizing Individual Driving Records. P.C.A.S. n° 46. 1959. Pag. 165-176.
 - Automobile Merit-Rating and Inverse Probabilities. P.C.A.S. n° 47. 1960. Pag. 37-40.
- Dubey, Satya D.: A Simple Test Function for Guarantee time Associated with the Exponential Failure Law. Skand. Aktuar. 1962. Pag. 25-38.
 - A Generalization of a Simple Test Function for Guarantee Time Associated with the Exponential Failure Law. Skand. Aktuar. 1963. Haft 1-2. Pag. 1-24.
 - A Generalization of the Likelihood-Ratio Test for Guarantee time Associated with the Exponential Failure Law. Skand. Aktuar. 1963. Haft. 1-2. Pag. 25-40.
 - Some percentile estimators for Weibull parameters. Technometrics. n° 9. 1967. Pag. 119-129
- Dubois de Montreynaud, B.: Méthode de sondage pour l'étude de l'influence de nouveaux critères sur le tarif "automobile" ASTIN. Vol. III, Part. III, Avril, 1965. Pag. 139-250
- Edey, J.: The relationship between assets and liabilities where benefits are subject to option XVIII C.I.A. Munich, 1968. Vol. III. Pag. 49-54.

- Erber, T.: The Gamma Function Inequalities of Gurland and Gautchi. S.A.J. 1960. Pag. 27-28.
- Eshita, Nawojiro: An Estimation of Claims Distribution. ASTIN. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 110-118.
- Esscher, Frederik: On the Probability Function in the Collective Theory of Risk. Skand. Aktuar, 1932.
- Feller, William: Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones. Vol. I. Ed. Limusa-Wiley, 1973. Pag. 67/ Pag. 293-298.
- Ferguson, Thomas S.: A Characterization of the Negative Exponential Distribution. Ann. Math. Statist. n° 35. 1964. Pag. 1199-1207.
 - On Characterizing Distributions by Properties of Order Statistics. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics. Serie A, n° 29. 1967. Pag. 265-278.
- Fernandez Sánchez, J.L.: Análisis y valoración de una empresa aseguradora. A.I.A.E. n° 11 y 12. 1970-71. Pag. 85-98.
- Ferrara, Giovanna: Distributions des Sinistre selon leur coût. ASTIN. Vol. III, Part. 1. Septiembre, 1971. Pag. 31-41.
- Ferrara, G.- Quario. G.: Distribution of the Number of Claims in Motor Insurance according to the Lag Settlement. ASTIN. Vol. IX, Parts. 1 and 2 Enero, 1977. Pag. 118-124.
- Finetti, Bruno De: Su una Imposizione alternativa della Theoria Collectiva del Rischio. XV. C.I.A. New York, 1957.
 - Sobre la Teoría de la Credibilidad. Conferencia pronunciada en el Instituto Italiano de Actuarios. (28-II-1963)
 - La théorie des plus grandes valeurs et son application aux problèmes de l'assurance. ASTIN. Vol. III, Part. II. Agosto, 1964. Pag. 116-131.

- Franck, M: Cibernética.
- Francks, Edouard: Théorie du Bonus. Conséquences de l'étude de M. R. le professeur Fréchet. ASTIN. Vol. I, Part. III. Avril, 1960. Pag. 113-122.
 - Sur la fonction de distribution de sinistre le plus élevé. ASTIN. Vol. II, Part. III. Avril, 1963. Pag. 415-424.
 - Sur la combinaison des événements et les résultats aléatoires quantitatifs qui en résultent. ASTIN. Vol. III, Part. III. Avril, 1965. Pag. 196-203.
 - Considérations sur les Modeles d'Avant Project Pour Classes de Tarif. ASTIN. Vol. VII, Part. 3. Marzo, 1974. Pag. 208-214.
 - La théorie du comportement et la credibility theory américaine. ASTIN. Vol. V, Part. I, Mayo, 1968. Pag. 15-24.
- Fréchet, Maurice: Essai d'une étude de succession de sinistres considérés come processus stochastiques. B.I.A.F. n° 227. Junio, 1959. Pag. 67-85.
- Friedman, D.G.: Insurance and the Natural Hazards. ASTIN. Vol. VII, Part. 1. Diciembre, 1972. Pag. 4-58.
- Fuelling, C.P.- Beekman, J.A.: A Stochastic Model of Computer Use. S.A.J. 1980. n° 1. Pag. 43-52.
- Gautchi, W.: Inequalities for Gamma and Incomplete Gamma Functions J. Math. Phys. n° 38. 1959. Pag. 77-81.
- Gerber, Hans U.: On Additive Premium Calculation Principles. ASTIN Vol. VII, Part. 3. Parzo, 1974. Pag. 215-222.
- Gokhale, D.V.: On an Inequality for the Gamma Function. Skand. Aktuar. 1962. Pag. 213-215.

- Goovaerts, M.J.- D.Hooge, L.- De Pril, N.: Some New Results on Infinite Divisibility. Transactions of the 29 C.I.A. Tokyo, 1976. Vol. 4. Pag. 539-543.
- Goovaerts, M.J.- Pril, N. De: Survival Probabilities Based on Pareto Claim Distributions. Pag. 154-157.
- Goovaerts, M.J.- De Vylder, F.: A Note on Iterative Premium Calculation Principles. ASTIN. Vol. 10, Part. 3. Diciembre, 1979. Pag. 325-329.
- Goovaerts, M.J.- Vylder- Mertens- Hardy: An Extension of an Invariance Property of the Swiss Premium Calculation Principle. ASTIN. Vol. 11, Part. 2. Diciembre, 1980. Pag. 145-153.
- Govindarajulu, Zakkula: Characterization of the Exponential and Power Distributions. Skand. Aktuar. 1966 Haft. 3-4. Pag. 132-136.
- Green, Edward A.: Initial and Experience Rating of Combined Coverage Policies. XVI. C.I.A. Bruselas, 1960. Vol. I. Pag. 1120125.
- Green, Mark R.: Riesgo y Seguro. Ed. Mapfre, 1974. Pag. 860/ Pag. 866/ Pag. 878.
- Greenwood, M.- Yule, Gudny: An Inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings with particular reference to the occurrence of multiples attacks of disease or of repeated accidents. Journal of the Royal Statistical Society. n° 83. 1920. Pag. 255-279.
- Grenander, Ulf: On Heterogeneity in New Life Insurance. Skand. Aktuar. 1957. Part. I: Pag. 71-81. Part. II: Pag. 153-179.
 - Some Remarks on Bonus Systems in Automobile Insurance. Skand. Aktuar. 1957. Pag. 180-197.
- Grimes, T.: Claim Frequency analysis in Motor Insurance. Journal of the Institute of Actuaries Student's Society. Vol. 19, Part. 3. Mayo, 1971. Pag. 1471-54.

- Guldberg, S.: Sui momenti della legge di distribuzione del Pólya
Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari.
Anno VI, n° 4. Ottobre, 1935.- XIII.
- Gurland, J.: An Inequality Satisfied by the Gamma Function. Skan-
dinavisk Aktuarietidskrift. 1956. Pag. 171-172.
- Gurtler, Max: Bonus ou Malus ?. ASTIN. Vol. III, Part. I. Diciem-
bre, 1963. Pag. 43-61.
- Haehling von Lanzenauer, Cristoph: Optimal Claim Decisión in Au-
tomobile Insurance Systems with Merit Rating Struc-
tures. 1970.
- Haehling von Lanzenauer, Cristph- Lundberg, William: The Propen-
sity to cause accidents. ASTIN. Vol. VII, Part.II.
Septiembre, 1973. Pag. 154-164.
- Hagg, R.V.: On Ratios of Certain Algebraic Forms. Ann Math. Sta-
tist. n° 22. 1951. Pag. 567-572.
- Hagstroem, K.G.: La loi de Pareto et la réassurance. Skand. Aktuar
1925. Pag. 65.
- Remarks on Pareto Distributions. Skand Aktuar.
1960. Pag. 59-71.
- Harter, H. Leon- Moore, A.M.: Maximum likelihood estimation of the
Parameters of gamma and Weibull populations froms
complete and from censared samples. Technometrics
n° 7. 1965. Pag. 639-643.
- Hassanein, K.M.: Percentile estimators for the parameters of the
Weibull distributions. Biometricka n° 58. 1971.
Pag. 673-676.
- Hassanein, K.M.- Legler, Warre K.: On Minimum Variance Stratifi-
cation for Estimating the Mean of a Weibull Po-
pulation. S.A.J. 1975. Pag. 207-214.
- Hewitt, Charles C.: The Negative Binomial Applied to the Canadian
Merit Rating Plan for Individual Automobile
Risk. P.C.A.S. n° 47. 1960. Pag. 55-65.
- Credibility for Severity P.C.A.S. n° 57. 1970.
Pag. 148-171.

- Hickman, James C.: Introduction and Historical Overview of Credibility. Artículo publicado en el libro "Credibility Theory and Applications", editado por Kahn Academic Press, 1975. Pag. 181-192.
- Holla, M.S.: Reliability Estimation of the Truncated Exponential Model. Technometrics. n° 9. 1967. Pag. 332-335
- D'Hooge, L.: Détermination de la Fonction de Structure d'une Classe de Tarif. ASTIN. Vol. VII, Part. 3. Mayo, 1974. Pag. 223-236.
- D'Hooge, L.- Franckx- Gennart: Utilization pratique de la méthode de simulation dans l'assurance "non life". ASTIN. Vol. V, Part. I. Mayo, 1968. Pag. 87-117.
- D'Hooge, L.- Goovaerts, M.J.: Bayesian Inference in Credibility Theory. ASTIN. Vol. VIII, Part. 2. Septiembre, 1975. Pag. 164-174.
- Houston, David B.: Risk, Insurance and Sampling Journal of Risk and Insurance. Diciembre, 1964. Pag. 535-538.
- Hovinen, Esa: A Procedure to Compute Values of the Generalised Poisson Function. ASTIN. Vol. IV, Part. II. Febrero, 1967. Pag. 129-135.
- On the Estimation of Means and Variances in the Case of Unequal Components. ASTIN. Vol. VIII, Part. 3. Septiembre, 1975. Pag. 323-335.
- Huang, J.S.: A Note on Order Statistics from Pareto Distribution. S.A.J. 1975. Pag. 187-190.
- Hurley, R.L.: A Credibility Framework for Ganging Fire Classification Experience, 1954.
- Jackson, P.: "Experience Rating" Trans. of the Society of Actuaries. 1953.
- Janardan, K.G.: A Characterization of Multinomial and Negative Multinomial Distributions. S.A.J. 1974. n° 1. Pag. 58-62.
- Jenkins, Gwilym M.: The Systems Approach. 1972.

- Jewell, William M.: The Credibility Distribution. ASTIN. Vol. VII, Part. 3. Marzo, 1974. Pag. 237-279.
 - Credible Means are exact Bayesian for Exponential families. ASTIN. Vol. VIII, Part. 1. Septiembre, 1974. Pag. 77-90.
 - Isotonic Optimization in Tariff Construction. ASTIN. Vol. VIII, Part. II. Septiembre, 1975. Pag. 175-203.
 - Regularity Conditions For Exact Credibility. ASTIN. Vol. VIII, Part. 3. Septiembre, 1975. Pag. 336-341.
 - Bayesians Learn while Waiting. ASTIN. Vol. 10 Part. 2. Marzo, 1979. Pag. 163-172.
- Johansen, Paul: Le risque de contiguïté dans l'assurance incendie des bâtiments. ASTIN. Vol. II, Part. III. Abril, 1963. Pag. 352-355.
 - Tariffing of Consequential Loss Insurance. ASTIN. Vol. VII, Part. III. Marzo, 1974. Pag. 270-276.
 - Early Models Describy the Fire Insurance Risk. ASTIN. Vol. 10, Part. 3. Diciembre, 1979. Pag. 330-334.
- Jung, Jan: On automobile insurance ratemaking. ASTIN. Vol. V, Part. I. Mayo, 1968. Pag. 41-48.
- Kabe, D.G.: On Moments of ORder Statistics from the Ratio Distribution. Skand. Aktuar. 1972. Pag. 179-181. n° 2.
- Kahane, Yehuda: The Theory of Insurance Risk Premiums. A Re-examination in the Light of Recent Developments in Capital Market Theory. ASTIN. Vol. 10, Part. 2. Marzo, 1979. Pag. 223-239.
- Kahn, Paul Markham: The application of utility tehory to group experience rating. XVII C.I.A. Londres- Edinburgo, 1964. Vol. III, Pag. 578-591.

- Karlsson, Jan- Erik: The Expected Value of IBNR-Claims. S.A.J. 1976. n° 2. Pag. 108-110.
- Kast- Johnson- Resenzweig: Teoría, Integración y Administración de Sistemas. 1969.
- Kauppi, Lauri- Ojantakanen, Pertti: Approximations of the Generalised Poisson Function. ASTIN. Vol. V, Part. II. Mayo, 1969. Pag. 213-226.
- Keffer, R.: An experience rating formula. Transactions of the Actuarial Society of America, n° 30. 1929. Pag. 130-139. Discusión: Pag. 593-611.
- Kemp, Adrienne W.: On Gamma Function Inequalities. Skand. Aktuar 1973. n° 2. Pag. 65-69.
- Kendall, M.G.- Stuart, A.: The advanced theory of statistics. Vol. I. New York: Hafner Publishing Co. 1959. Vol. II. 1961.
- Khamis, S.H.- Rudert, W.: Tables of the Incomplete Gamma Function Ratio. Von Liebig, Darmstadt, 1965.
- Kimball, B.F: On the choice of plotting positions on probability paper. J. Amer. Statist. Assoc. n° 55. 1960. Pag. 546-560.
- Kitagawa, T.: Tables of Poisson Distribution. Tokyo, 1952.
- Klinker, J.Van: Applications of Methods of Operations Research and Modern economic theory. ASTIN. Vol. V, Part. I. Mayo, 1968. Pag. 51-61.
- Klir, G.J.: An Approach to General Systems Theory. 1969.
- Kormes, Mark: A practical application of credibility to experience rating plans for hospitalization and medical-surgical insurance. ASTIN. Vol. V, Part. I. Mayo, 1968. Pag. 33-40.
- Kupper, Josef: Wahrscheinlichkeits theoretische Modelle in der Schadenversicherung. 1962. Pag. 74.
 - Some Aspects of Cumulative Risk. ASTIN. Vol. III, Part. I. Diciembre, 1963. Pag. 85-103.
 - The recent Development of Risk Theory and its Applications. ASTIN. Vol. IV, Part, II. Febrero, 1967. Pag. 106-119

- Lange, Oskar: Introducción a la Econometría. Fondo de Cultura Económica. Mexico, 1964. Pag. 147-163.
- Lanzenauer, C.H. Von- Lundberg, W.N.: The n-Fold Convolution of a Mixed Density and Mass Function. ASTIN. Vol. VIII, Part. 1. Septiembre, 1974. Pag. 91-103.
- Lanzenauer, C.H. Von- Wirght, Don: Multistage Curve Fitting. ASTIN. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 191-202.
- Lasheras-Sanz, Antonio: Coste y tarificación del Seguro Obligatorio de Responsabilidad Civil de vehículos de Motor. A.I.A.E. nº 5. 1965. Pag. 31-60.
- Lenaire, J.: La Soif du Bonus. ASTIN. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 181-190.
 - How to Define a Bonus-Malus System with an Exponential Utility Function. ASTIN. Vol. 10, Part. 3. Diciembre, 1979. Pag. 274-282.
- Leve, G. de- Weeda, P.J.: Driving with Markov-programming. ASTIN. Vol. V, Part. I. Marzo, 1968. Pag. 62-86.
- Loimaranta, K.: Some asymptotic properties of Bonus Systems. ASTIN. Vol. VI, Part. 3. Mayo, 1972. Pag. 233-245.
 - On the Calculation of Variances and Credibilities by Experience Rating. ASTIN. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 203-207.
- Longley-Cook, L.H.: An Introduction to Credibility theory P.C.A.S. nº 48. 1962. Pag. 191-224.
 - Statistics and Ratemarking for Commercial Fire insurance. 18 C.I.A. Munich, 1968.
- López Cachero, Manuel: Fundamentos y Métodos de Estadística. Ed. Pirámide, 1977.
 - Métodos de decisión económica en régimen de certidumbre. Anales del CUNEF. 1979. Pag. 375-406.
 - Decisión y concepciones de la utilidad. Anales del CUNEF 1980. Pag. 133-158.

- Lopéz Faba, Arsenio: Características fundamentales y aplicaciones de la metodología de la acción. Anales del CUNEF. 1979. Pag. 407-448.
- Lukács, E.: A Characterization of the Gamma Distribution. Ann Math. Statist. n° 26. 1955. Pag. 319-324.
- Lundberg, O.: On random processes and their application to sickness and accident statistics. Upsala, 1940.
- - Une note sur des systèmes de tarification basés sur des modèles du Type Poisson composé. ASTIN. Vol. IV, Part. 1. Enero, 1966. Pag. 49-58.
- Lwin, Thaung: Estimation of the Tail of the Pareto Law. Skand. Aktuar. 1972. n° 2. Pag. 170-178
- Lykke Jensen: Stratification, logairhmic normal distribution. S.A.J. 1959. Pag. 144.
- Makgill, Stephen S.: An Analysis of the Adequacy of the Various Factors and Rating Values Used in Retrospective Rating. P.C.A.S. Vol. 50. 1963. Pag. 32-49.
- Malik Henrick John: Exact Moments of Order Statistics from the Pareto Distribution. Skand. Aktuar. 1970. n° 3-4. Pag. 115-117.
 - = Exact Moments of order statistics from a power-function distribution. S.A.J. 1967. Pag. 64-69.
 - Distribution of Product Statistics from the Pareto Distribution. Metrika. n° 15. 1970. Pag. 19-22.
 - Estimation of the Parameters of the Pareto Distribution. Metricka. n° 16. 1970. Pag. 126-132.
 - Bayesian Estimation of the Pareto Index. Skand. Aktuar. 1970. n° -2. Pag. 6-9.
 - A Characterisation of the Pareto Distribution. Skand. Aktuar. 1970. n° 3-4. Pag. 115-117.

- Markowitz, H.: Portfolio Selection. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University. 1959. Pag.188-201.
- Martin, D.B.: Automobile Insurance: Canadian Accident-Free Classification System. ASTIN. Vol. I, Part. III. Abril, 1960. Pag. 123-133.
- Martin-Lof, Anders: A Method for Finding the Optimal Decision Rule for a Policy Molder of an Insurance with a Bonus System. Skand. Aktuar. 1973. n° 1. Pag. 23-29.
- Mathai, A.M.: Products and Ratios of Generalized Gamma Variates. S.A.J. 1972. n° 2. Pag. 193-198.
- Mayerson, Allen L.: A Bayesian View of Credibility. P.C.A.S. n° 51. 1964. Pag. 85-104.
- Mayerson, Allen L.- Jones, Donald A.- Bowers, Newton L.: On the Credibility of the Pure Premium P.C.A.S. n° 55. 1968.
- Mc. Cool, J.I.: The construction of good linear estimates for a Smaller sample size. Technometrics. n° 5. 1965. Pag. 543-552.
- Mc Guire, J.W.: Interdisciplinary Studies in Bussines Behavior.
- Mc. Intosh, K.L.: Mathematical limits to the Judgment Factor in Fire Schedule Rating. P.C.A.S. n° 48. 1961.
- Mehring, Johannes: Premium Rates in the German Motor Insurance Bussiness. ASTIN. Vol. III, Part. I. Diciembre, 1963. Pag. 13-19.
- Menon, M.V.: Estimation of the shape and scale parameters of the Weibull distribution. Technometrics. n° 5. 1963. Pag. 175-182.
- Miller, Robert B.- Hickman, James C.: Insurance Credibility theory and Bayesian Estimation. "Credibility theory ands Application" Pag. 249-279.
- Mintz, A.: A methodological note on time intervals between consecutive accidents. Journal of Applical Psychology. n° 40. 1956. Pag. 189-191.

- Molina, E.C.: Tables of the Individual and Cumulative Terms of Poisson Distribtuion. D. Von Nostrand Co. Princen-ton, N.J. 1942. Poisson's Exponential Binomial Li-mit. Van Nostrand. 1949.
- Mowbray, Albert H.: How Extensive Payroll Exposure is Necessary to Give a Dependoble Pure Premium ?. P.C.A.S. nº 1. 1914. Pag. 24-30.
- Muff, M.: The Influence of the Franchise on the Number of Claims in Motor Insurance. ASTIN. Vol. VI, Part. 3. Pag.191-194.
- Neumann, L.: Apercu du champ d'application de la theorie du ris-que dans l'assurance de choses en Autriche. ASTIN. Vol. I, Part. V. Julio, 1961. Pag. 287-296.
- Nieto de Alba, Ubaldo: La distribución del número de siniestros en la matemática del Seguro. Estadística Española nº 23. Abril-Junio, 1964. Pag. 5-18.
 - Presentación a diversos artículos sobre tarifica-ción del automóvil de Thepaut, Mehring, etc. Ris. nº 5. I Trimestre, 1964. Pag. 311-320.
 - Bases Técnicas y Reservas de Riesgos en Curso. Ries-go y Seguro. II Trimestre, 1964.
 - Ensayo de una teoría para el estudio de la liquidez e inversión de las reservas técnicas. 18. C.I.A. Minich, 1968. Vol. III. Pag. 197-214.
 - Apuntes de Matemática Actuarial. Facultad de Cien-cias Económicas y Empresariales. Madrid, 1970.
 - Concepción Cibernética en la Dirección Actuarial de la Empresa de Seguros. Centro de Investigacio-nes y Estudios del Seguro Iberoamericano. Estudio i nº 8-10. Junio, 1970.
 - El entorno económico en la dirección de la Empresa de Seguros. A.I.A.E. nº 13. 1972. Pag. 55-80.
 - Apuntes de Introducción a la decisión empresarial Facultad CCEE y EE, 1972.

- Nieto de Alba, Ubaldo: Introducción a la Estadística. Concepción Bayesiana. Aguilar, 1973. (3 tomos).
 - Solvencia, beneficios y control de la empresa financiera. A.I.A.E. nº 14 y 15. 1973-74. Pag. 75-96.
 - Aspectos estadísticos de la Ciencia de la Dirección. (Riesgo e incertidumbre). Anales del CUNEF 1979. Pag. 493-524.
 - La función de entropía en las decisiones de inversión. Anales del CUNEF. 1980. Pag. 253-272.
- Norberg, Ragmar: A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems Scandinavian Actuarial Journal. 1976. nº 2. Pag. 92-107.
 - Credibility Premium=Plans wich Make Allowance for Bonus Hunger. S.A.J. 1975. nº 2. Pag. 73-86.
 - The Credibility Approach to Experience Rating. S.A.J. 1979. nº 4. Pag. 181-221.
- Ottavian, G.: La teoría del rischio del Dlundberg e til suo legame con la teoria classica del rischio. Giornale dell'Instituto Italiano de Attuarios. Anno IX, nº 2. Abril, 1940.
- Ottavian, Riccardo: On a Form of Automobile Liability Insurance wtih a Prepaid Discount. ASTIN. Vol. 10. Part. 1. Mayo, 1978. Pag. 73-77.
- Pareto, Vilfredo: Manuel d'economie politique. París. 1927.
- Parzen, Emanuel: Procesos estocásticos. Paraninfo. 1972. Pag. 89.
- Paulson, E.: On Certain Likelihood-Ratio Tests Associated with the Exponential Distriution. Ann. Math. Stat. nº 12. 1941. Pag. 301-306.
- Pena Pareto, Jesús B.: Modelo Econométrico para el estudio de la Distribución personal de la renta en España. Estadística Española, mº 27. Abril-Junio, 1965. Pag. 38-49.

- Pentikäinen, T.: On the Approximation of the Total Amount of Claims
ASTIN. Vol. IX, Part. 3. Diciembre, 1977. Pag.
281-289.
- Dynamic Programming, An Approach for Analysis
Competition Strategies. ASTIN. Vol. 10, Part. 2.
Marzo, 1979. Pag. 183-194.
- Pereira Cabral, M.A.- Afonso García, J.M.: Calculation of Provi-
sions Using Credibility Theory. ASTIN. Vol. VII,
Part. 3. Marzo, 1974. Pag. 277-292.
- Study of Factors Influencing the Risk and their
Relation to Credibility Theory. ASTIN. Vol. IX,
Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 84-104.
- Perryman- F.S.: Some notes on Credibility P.C.A.S. n° 19. 1932.
- Experience Rating plan Credibilities. P.C.A.S.
n° 24. 1937.
- Pesonen, Erkki: A Numerical method of finding a suitable bonus
scale. ASTIN. Vol. II, Part. I. 1963. Pag. 102-108.
- A Modification of the Esscher Method. Skand. Ak-
tuar. 1964. Häft. 3-4. Pag. 160-163.
- On the Calculation of the Generalised Poisson
Function. ASTIN. Vol. IV, Part. II. Febrero, 1967.
Pag. 120-128.
- NP-Approximation of Risk Process. Skand. Aktuar
1968. n° 3-4. Pag. 158-164/ 1969. n° 3-4. Sup-
plement Pag. 63-69.
- NP-Technique as a Tool in Decision Making. ASTIN
Vol. VIII, Part. 3. Septiembre, 1975. Pag. 359-363.
- Pfeffer, I.- Klock, D.: Perspectives on Insurance. 1974.
- Philipson, Carl: Analytical Expressions of Risk Involved in General
Insurance. ASTIN. Vol. I, Part. I. Diciembre, 1958
Pag. 32-41.
- A method of Estimating Grouped frequencies. Skand
Aktuar. 1959. Häft. 3-4.

- Philipson, Carl: The Swidsh System of Bonus. ASTIN. Vol. I, Part. III. Abril, 1960. Pag. 134-141.
- Notes on the Application of Compound Poisson Processes to Sickness and Accident Statistics. ASTIN. Vol. I, Part. IV. Diciembre, 1960. Pag. 224-237.
- Abstracts for a lecture on problems involved in motor insurance. XVI. C.I.A. Bruselas, 1960. Vol. III. Pag. 195-204.
- An Extension of the Models usually applied to the Theory of Risk. S.A.J. 1961. Part. 3-4. Pag. 223-239.
- Some Estimation Problems Connected with Compound Poisson Processes. S.A.J. 1961. Part. 3-4. Pag. 240-250.
- On the Difference between the Concepts "Compound" and "Composed" Poisson Processes. ASTIN. Vol. II. Part. III. Abril, 1963. Pag. 445-451.
- On Esscher Transforms of Distribution Functione Defining a Compound Poisson Process for Large Values of the Parameter. S.A.J. 1963. n° 3-4. Pag. 226-236.
- Expansion of the Distributions Functions Defining Some Processes Based Poisson Distribution. ASTIN Vo. III, Part. I. Diciembre, 1963. Pag. 20-42.
- On the Risk Theory of Motor Insurance. S.A.J. 1964 n° 1-2 Pag. 53-66.
- The Transformed parameters of Compound Poisson processes and the effect of an increase of that parameter 17 C.I.A. Londres-Edinburgo, 1964. Vol. III. Pag. 627-649.
- A Gneralized Model for the Risk Proces and its Application to a Tentative Evaluation of Outstanding Liabilities. ASTIN. Vol. III, Part. III. Abril, 1965. Pag. 215-238.

- Philipson, Carl: Note on the Relation between "Compound" and "Composed" Poisson. Process. ASTIN. Vol. IV, Part. II. Febrero, 1967. Pag. 191-192.
- A Review of the Collective Theory of Risk. S.A.J. 1968.
- Comments on Different deduction of expressions for conditional expectations. ASTIN. Vol. V, Part. II. Mayo, 1969. Pag. 298-302.
- A note on some compound Poisson distributions. ASTIN. Vol. V, Part. 3. Febrero, 1971. Pag. 328-373.
- Picard, P.: Contribution a l'étude du coût des sinistres automobiles. ASTIN. Vol. 10, Part. 1. Mayo, 1978. Pag. 113-127.
- Pitkanen, Paavo: Tarif Theory. ASTIN. Vol. VIII, Part. 2. Septiembre, 1975. Pag. 204-228.
- Polya-Eggenberger, F.: Über die statistik verketteter vorgänge. Zeitschrift angew Math. n° 3. 1943.
- Prieto Pérez, Eugenio: Aplicaciones al seguro de la distribución binomial negativa. Estadística Española, n° 40. Julio-Septiembre, 1968. Pag. 55-56. A.I.A.E. n° 13 1972. Pag. 27-44.
- Distribución de Pareto. Aplicaciones al Seguro. Estadística Española n° 43. Abril-Junio, 1969. Pag. 63-70.
- Las Entidades de Seguros como Intermediarios Financieros. A.I.A.E. n° 17. 1976. Pag. 81-92.
- La Estrategia Optima del Asegurado de Responsabilidad Civil en el Seguro de Automóviles, cuando se practica un Sistema de Primas con Bonificaciones y Penalizaciones según la siniestralidad. Cuadernos Universitarios de Planificación Empresarial. Vol. 5 n° 1. 1979. Pag. 57-62.
- Dimensión y solvencia de la empresa aseguradora. C.U.P.E. Vol. VI, n°1. 1980. Pag. 17-40

- Pril, Nelson de: The efficiency of Bonus-Malus System. ASTIN. Vol. 10, Part. 1. Mayo, 1978. Pag. 59-72.
 - Optimal Claim decisions for a Bonus-Malus System: a Continuous Approach. ASTIN. Vol. 19, Part. 2 Marzo, 1979. Pag. 215-222.
- Prokasa, Rao B.L.S.: On a Characterization of Geometric Distribution. S.A.J. 1980. Pag. 139-140.
- Ramachandran, G.: Extreme value Theory and Large Fire Losses. ASTIN Vol. VII, Part. 3. Marzo, 1974. Pag. 293-310.
 - Factors Affecting Fire Loss-Multiple Regression Models with Extrema Values. ASTIN. Vol. VIII, Part. 2. Septiembre, 1975. Pag. 229-241.
- Rao, B Raja: An Improved Inequality Satisfied by the Gamma Function. Skand Aktuar 1969. n° 1-2. Pag. 78-83.
- Rao, B Raja- Garg, M.L.: An Inequality for the Gamma Function Using the Analogue of Bhattacharyya's Inequality. Skand. Aktuar. 1969. n° 1-2. Pag. 71-77.
- Rao Uppuluri, V.R.: A Stronger Version of Gautschi's Inequality Satisfied by the Gamma Function. Skand. Aktuar. 1964. Häft. 1-2. Pag. 51-52.
- Reid, D.H.: Representations of Claims Arising From A Risk Portfolio. ASTIN. Vol. VIII, Part. 2. Septiembre, 1975. Pag. 242-256.
- Reiersol, Olav: Identifiability, Estimability, Phenorestricting Specifications and Zero Lagrange Multipliers in the Analysis of Variance. S.A.J. 1963. Pag. 131.
- Rios, Sixto: Métodos estadísticos. Ed. del Castillo. Sexta Edición. 1967.
 - La Investigación Operativa en los problemas de inversiones. Trabajos de Estadística y de I.O. Madrid, 1967.
- Roberts, Lewis M: A discipline for the avoidance of unnecessary assumptions. ASTIN. Vol. V, Part. 3. Febrero, 1971. Pag. 374-387.

- Rogers, G.S.: An Application of a Generalized Gamma Distribution
Ann Math Statist. n° 35. 1964. Pag. 1368-1370.
- Rossberg, H.J.: Characterization of distribution functions by the
independence of Certain functions of order statistics. Sankhya. Serie A. n° 34. Pag. 111-120.
- Samanta, M.: Characterisation of the Pareto Distribution. Skand
Aktuar. 1972. n° 2. Pag. 191-192.
- Saxer, Walter: Versicherungsmathematik. Tömo 2.
- Schafer, Dick B.: A Note on a Simple test function for the Weibull
Distribution Location Parameter. S.A.J. 1975.
n° 1. Pag. 1-5.
- Schmitter, H.- Straub, E.: Quadratic Programming in Insurance.
ASTIN. Vol. VII; Part. 3. März, 1974. Pag. 311-322
- How to Find the Right Subdivisions Into Tariff
Classes. ASTIN. Vol. VIII, Part. 2. Septiembre,
1975. Pag. 257-263.
- Seal, Hilary: The Random Walk of a Simple Risk Business. ASTIN
Vol. IV, Part. I. Enero, 1966. Pag. 19-28.
- Stochastic Theory of Risk Business. John Wiley &
Sons, 1969. Pag. 65.
- Approximations to Risk Theory's $F(x,t)$ by Means of
the Gamma Distributions. ASTIN. Vol. IX, Parts. 1
and 2. Enero, 1977. Pag. 213-218.
- From Aggregate Claims Distribution to Probability
of Ruin. ASTIN. Vol. 10, Part. 1. Mayo, 1978. Pag.
47-53.
- Survival Probabilities Based on Pareto Claim Dis-
tributions ASTIN. Vol. 11, Part. 1. Junio, 1980.
Pag. 61-72.
- Segerdhal, Carl Otto: When does Ruin Occur in the Collective Theo-
ry of Risk ?. Skand. Aktuar. 1955.

- Shanbhag, D.N.: On Some Inequalities Satisfied by the Gamma Function. Skand. Aktuar. 1967. Häft 1-2. Pag. 45-49.
- Simberg, Hakan: Individuelle Praemienregehung, eine Art des "experience rating". 17 C.I.A. Londres- Edinburgo, 1964. Vol. III. Pag. 650-659.
- Simon, Le Roy J.: Negative Binomial and Poisson distributions compared. P.C.A.S. n° 47. 1960. Pag. 20-40.
 - Fitting Negative Binomial distributions by the method of maximum likelihood. P.C.A.S. n° 48. 1961. Pag. 45-53.
 - An Introduction to the Negative Binomial distribution and its applications. P.C.A.S. n° 91. Vol. XLIX, Part. I. 1962. Pag. 1-11.
- Simonsen, W.: On the Solution of a Maximum-likelihood Equation of the Negative Binomial Distribution. S.A.J. 1976. n° 4. Pag. 220-231.
- Snow, C.P.: The two Cultures and the Scientific Revolution. Cambridge University Press. London, 1959.
- Spjøtvoll, Emil: A Mixed Model in the Analysis of Variance Optimal Properties. S.A.J. 1966. n° 1. Pag. 1
- Stacy, E.W.: A Generalization of the Gamma Distribution. Ann Math Statist. n° 33. 1962. Pag. 1187-1192.
- Stern, P.K.: Ratemarking procedures for automobile liability insurance. P.C.A.S. n° 52. 1965.
- Straub, E.: Estimation of the number of excess claims by means of the credibility theory. ASTIN. Vol. V, Part. 3. Febrero, 1971. Pag. 388-392.
- Snundt, Bjørn: Credibility and Relative Exchangrability. S.A.J. 1979. n° 1. Pag. 45-51.
 - A Hierarchical Credibility Regression Model. S.A.J. 1979. n° 2-3. Pag. 107-114.
 - On Choice of Statistics in Credibility Estimation S.A.J. 1979. n° 2-3. Pag. 115-124.
 - A Multilevel Hierarchical Credibility Regression Model. S.A.J. 1980. n°1. Pag. 25-32.

- Takács, Lajos: Stochastic Processes. Problems and Solutions. Methuen, 1960. Pag. 52-53.
- Taylor, G.C.: Experience Rating with Credibility Adjustement of the Manual Premium. ASTIN. Vol. VII, Part. 3. Marzo, 1974. Pag. 323-336.
- Separation of Inflation and other Effects from the Distribution of Non-Life Insurance Claims Delays. ASTIN. Vol. IX, Parts: 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 219-230.
- Testing Gooves of Fti of an Estimated Run-off Triangle. ASTIN. Vol. 10, Part. 1. Mayo, 1978. Pag. 78-86.
- An Investigation of the Use of Weighted Averages in the Estimation of the Mean of a Long-Tailed Claim Size Distribution. ASTIN. Vol. 10, Par. 1. Mayo, 1978. Pag. 87-98.
- Credibility Analysis of a General Hierarchical Model. S.A.J. 1979. n° 1. Pag. 1-12.
- Probability of Ruin under Inflationary Conditions or under Experience Rating. ASTIN. Vol. 10, Part. 2 Mayo, 1979. Pag. 149-162.
- Rating the Discount for a Motor Insurance Excess. ASTIN. Vol. 10, Part. 3. Diciembre, 1979. Pag. 295-302.
- The Negative Exponential Distribution and Average Excess Claim Size. ASTIN. Vol. 10, Part. 3. Diciembre, 1979. Pag. 303-304.
- Probability of Ruin with Variable Premium Rate. S.A.J. 1980. n°2. Pag. 57-76.
- Thépaut, André: Aspect politique et aspect administratif du Bonus pour non sinistre. B.I.A.F. n° 27. Junio, 1959. Pag. 125-140.

- Thorin, Olof: On the Infinite Divisibility of the Pareto Distribution. S.A.J. 1977. n° 11 Pag. 31-40
- On the Infinite Divisibility of the Lognormal Distribution S.A.J. 1977. Pag. 121-148.
- Thorin, Olof- Wikstod, Nils: Claculation of Ruin Probabilities when the Claim Distribution is Lgonormal. ASTIN. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag.231-246.
- Thyrión, Paul: Contribution a l'étude du bonus pour non sinistre en assurance automobile. ASTIN. Vol. I, Part. III. Abril, 1960. Pag. 142-162.
- Etude de la loi de probabilité de la variable "nombre de sinistres" dans l'assurance automobile. XVI. C.I.A. Bruselas, 1960. Pag. 25-36.
- Regards sur le Développement récent de la Théorie du Risque. ASTIN. Vol. IV, Part. II. Febrero, 1967. Pag. 87-105.
- Remarques su le Transformation d'une Famille de Lois de Poisson composées en Lois de Poisson par Grappes. ASTIN. Vol. VI, Part. 1. Pag. 47-65. Septiembre, 1971.
- Quelques observations Statistiques sur la variable "Nombre de Sinistres" en Assurance Automobile. ASTIN. Vol. VI, Part. 3. Mayo, 1972. Pag. 203-211.
- Tiago de Oliveira, J.: Statistical Methodology for Large Claims. ASTIN. Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 1-9.
- Vadja, Stefan: Markov chains and the determination of fair premiums. ASTIN. Vol. IV, Part. III. Julio, 1967. Pag. 265-268.

- Vegas Asensio, Jesús: Determinación de un intervalo de confianza para la predicción del déficit técnico en el S.O.A. A.I.A.E. nº 13. 1972. Pag. 13-26.
- La empresa aseguradora como servosistema. Seguros, nº 45. Nero-Marzo, 1973. Pag. 11-28.
- Aplicación de la Teoría de la Credibilidad a la tarificación de los riesgos. nº 52. Octubre- Diciembre, 1974. Pag. 321-340.
- Modelos de decisión en el Reaseguro. Anales del I.A.E. nº 17. 1976. Pag. 121-130.
- Sistemas de información-decisión en la Empresa. Análisis del rendimiento y de la eficacia de un departamento de Marketing. Anales del CUNEF. 1979. Pag. 711-746.
- Un análisis del riesgo de la tesorería en las entidades bancarias. Anales del CUNEF. 1980. Pag. 319-332.
- Un ensayo sobre la Concepción Sistema aplicada a la empresa de Seguros. 21. C.I.A. Zurich-Lausanne Junio, 1980. Tomo I. Pag. 443-462.
- Vegas Montaner, José Manuel: Sistemas dinámicos. Anales del CUNEF. 1980. Pag. 333-354.
- Vegas Pérez, Angel: Deducción abreviada de la fórmula de Stirling para el cálculo de n . Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Tomo XXXVI. Pag. 126-129.
- Expresión aproximada de una función de distribución. Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa. Vol. XVII, Cuaderno II y III. 1965. Pag. 41-51.
- Estimación no paramétrica de procesos monótonos. A.I.A.E. nº 5. 1965. Pag. 83-98.
- Aplicación de la teoría de juegos de estrategia al problema de la integración de riesgos. A.I.A.E. nº 5. 1965. Pag. 175-188.

- Vegas Pérez, Angel: Aplicaciones Actuariales de la "Fiabilidad" y de la "Credibilidad". 18 C.I.A. Munich, Junio, 1968. Vol. 4. Pag. 727-730. A.I.A.E. nº8. 1968.
- Introducción a la Estadística Bayesiana. Apuntes de la Cátedra de Estadística Actuarial. Facultad de CCEE y EE. Madrid, 1969.
- Estadística Actuarial. Teoría de la Supervivencia. Madrid, 1969.
- Modelos de Integración. Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa. Vol. XXI, Cuadernos I y II. 1970. Pag. 17-34.
- Modelos de integración económica. Anales de Economía 3º Epoca. Nº 5 y 8. 1970. Pag. 303-318.
- Estadística. Aplicaciones Econométricas y Actuariales. Ed. Pirámide. 1980. Pag. 374.
- Veléz Catalán, Antonio: Distribución de los stocks en almacén. Estadística Española. nº 23. Abril-Junio, 1964. Pag. 19-31.
- Vepsäläinen, S.: Applications to a Theory of Bonus Systems. ASTIN Vol. VI, Part. 3. Mayo, 1972. Pag. 212-221.
- Verbeek, M.G.: An Approach to the Analysis of Claims Experience in Motor Liability Excess of Loss Reinsurance. ASTIN. Vol. VI, Part. 3. Mayo, 1972. Pag. 195-202.
- Vincke, Philippe: Modeles Additifs et Non Additifs en Actuariat.. ASTIN. Vol. 10, Part. 2. Marzo, 1979. Pag. 173-182.
- Vylder, Floriaan de : Introduction aux théories actuarielles de Credibilité. Institut des Sciences actuarielles. Université Catholique de Louvain. Bruxelles, 1975.
- Geometrical Credibility. S.A.J. 1976. nº 3. Pag. 121-149.

- Vylder, Floriaen de : Parameter Estimation in Credibility Theory.
ASTIN. Vol. 10, Part. 1. Mayo, 1978. Pag.
99-112.
- Vylder, Floriaen de- Ballegeer, Y.: A Numerical Illustration of
Optimal Similinear Credibility. ASTIN. Vol.
10, Part. 2. Marzo, 1978. Pag. 131-148.
- Waters, M.R.: Premium Rates under Inflationary Conditions. ASTIN
Vol. 11, Part. 1. Junio, 1980. Pag. 29-34.
- Wayne, Wymore A.: A mathematical theory of systems engineering.
John Wiley, 1967.
- Weaber, Warren- Shannon: The Mathematical Theory of Communication
1948.
- Welten, C.P.: The unearned no claim bonus. ASTIN. Vol.V; Part. I
Marzo, 1968. Pag. 25-32.
- White, J.S.: Linear estimation for the Log Weibull distribution
General Motors Research.Publication. GMR-481. 1965.
- Whitney, Albert W.: The Theory of Experience Rating. P.C.A.S.
n° 4. 1918. Pag. 2742-292.
- Wiennner, Norbert: Cybernetics and Society. 1952.
- Wilks, Samuel S.: Mathematical Statistics. John Wiley and Sons.
1962.
- Wise, M.H.: The use of the Negative Binomial distribution in an
Industrial Sampling problem. Supplement to Journal
of the Royal Statistical Society. n° 8. 1946. Pag.
202-211.
- Wit, G.W. de- Kastelijn, W.M.: An Analysis of Claim Experience
in Private Mealth Insurance to Establish a Relation
between Deductibles and Premium Rebates. ASTIN.
Vol. IX, Parts. 1 and 2. Enero, 1977. Pag. 257-266.
- The Solvency Margin in Non-Life Insurance Compa-
nies. ASTIN. Vol. 11, Part. 2. Diciembre, 1980.
Pag. 136-144.

- Wolff, Karl H.: Collective Theory of Risk and Utility Function
ASTIN. Vol. IV, Part.I. Enero, 1966. Pag.6-10.
- Zehnworth, Benjamin: The Mean Credibility Formuele. is a Bayes
Rule. S.A.J. n° 4. 1977. Pag. 212-216.
- Credibility and the Dirihlet Process. S.A.J.
1979. n° 1. Pag. 13-24.
- A Hierarchical Model for the Estimation of
Claim Rates in a Motor Car Insurance Port-
folio. S.A.J. 1979. n° 2-3. Pag. 75-82.

